Απειροστικός Λογισμός Ι – 1 Σεπτεμβρίου 2010

1. (α) Διατυπώστε την αρχή του ελαχίστου (αρχή καλής διάταξης) στο $\mathbb{N}$.

(β) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\sup A = \sup B$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $|a - b| < \varepsilon$.

(γ) Δείξτε ότι το σύνολο

$$K = \left\{ \frac{n}{n+m} : m, n = 1, 2, \dots \right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup K$ και $\inf K$. Εξετάστε αν το K έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο. Αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(2 μονάδες)

2. Για καθεμία από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{2^n n!}{n^n}, \quad \beta_n = \frac{\text{συν}(n^2)}{\sqrt{n}}, \quad \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \quad \delta_n = \left(\sqrt[n]{4} - 1 \right)^{3n}.$$

(2 μονάδες)

3. (α) Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

(i) Αν $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(ii) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(β) Έστω (β_n) ακολουθία μη μηδενικών πραγματικών αριθμών, με την εξής ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |\beta_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{\beta_n} \to 0.$$

(2.5 μονάδες)

4. (α) Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0,1)$. Να βρεθεί το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα για την παρακάτω πρόταση:

> Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, το $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ δεν υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x \to x_0^+} h(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0^-} h(x)$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά.

(2 μονάδες)

5. (α) Διατυπώστε τον ορισμό και την άρνηση του ορισμού της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [0,3]$ συνεχής και επί συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in [0,1]$ ώστε $f(y) = 2y^2 - y + 1$.

(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $3e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

(2 μονάδες)

6. (α) Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι: αν το $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ υπάρχει, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

(β) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$. Εξετάστε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν ναι, εξετάστε αν η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(2 μονάδες)

Καλή Επιτυχία!