Απειροστικός Λογισμός Ι – 22 Ιανουαρίου 2010

1. (2 μον.) (α) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$A = \left\{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} : n = 1, 2, \dots\right\} \cup [3, 4).$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
(β) Έστω B ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $\sup(B) \notin B$, δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (x_n) στοιχείων του B ώστε $x_n \to \sup(B)$.

2. (1.5 μον.) Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{n^3}{4^n}, \qquad \beta_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n + 2n}, \qquad \gamma_n = \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}.$$

3. (1.5 μον.) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

(ii) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) είναι κάτω φραγμένη.

(iii) Αν $a_n \to +\infty$ τότε η (a_n) είναι αύξουσα.

4. (1.5 μον.) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε πλήρως ότι: αν η f είναι ασυνεχής στο x_0 τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ ώστε $x_n \to x_0$ αλλά $f(x_n) \not\to f(x_0)$.
(β) Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g\left(\frac{1}{n}\right) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. (1 μον.) Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in [-1, 1]$,

$$[f(x)]^2 + x^2 = 1.$$

Δείξτε ότι ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής: «$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$» ή «$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$».

6. (1 μον.) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη συνάρτηση.

7. (1.5 μον.) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ημ} \frac{1}{x^2} & , \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.
(α) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
(β) Δείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η f' δεν είναι φραγμένη συνάρτηση στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
(γ) Εξετάστε αν η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. (2 μον.) (α) Έστω $b > a > 0$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο (a, b). Αν

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b},$$

δείξτε ότι υπάρχει $y \in (a, b)$ ώστε $f(y) = yf'(y)$.
(β) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $x > 10$ ισχύει

$$f'(x) \geq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Καλή Επιτυχία!

Σύντομες υποδείξεις

1 (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $1 < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2 < 4$. Επίσης, αν $x \in [3,4)$ τότε $1 < 3 \leq x < 4$. Άρα, ο 1 είναι κάτω φράγμα του A και ο 4 είναι άνω φράγμα του A.

Δείχνουμε ότι $4 = \sup A$: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\max\{3, 4-\varepsilon\} < x < 4$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in A$ ώστε $4 - \varepsilon < x$. Το συμπέρασμα έπεται από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum.

Για να δείξουμε ότι $1 = \inf A$ παρατηρούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$, οπότε $1 + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1 + \varepsilon$. Αφού $1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \in A$, το συμπέρασμα έπεται από τον ε-χαρακτηρισμό του infimum.

Τέλος, οι 1 και 4 δεν ανήκουν στο A, άρα το A δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

(β) Θέτουμε $b = \sup B$. Υπάρχει $b_1 \in B$ που ικανοποιεί την $b - 1 < b_1 \leq b$. Όμως, $b_1 \neq b$ (διότι $b \notin A$), άρα $b - 1 < b_1 < b$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $b_1, \ldots, b_m \in A$ που ικανοποιούν τα εξής:

1. $b_1 < b_2 < \cdots < b_m < b$.
2. Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ ισχύει $b - \frac{1}{k} < b_k < b$.

Τότε, ο $s_m = \max\{b - \frac{1}{m+1}, b_m\}$ είναι μικρότερος από τον b. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $b_{m+1} \in B$ που ικανοποιεί την $s_m < b_{m+1} < b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $b_m < b_{m+1}$ και $b - \frac{1}{m+1} < b_{m+1} < b$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία (b_n) στοιχείων του A που ικανοποιούν την $b - \frac{1}{n} < b_n < b$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $b_n \to b$.

2. Για την α_n εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου: έχουμε

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{(n+1)^3 4^n}{n^3 4^{n+1}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{4} \cdot 1^3 = \frac{1}{4} < 1,$$

άρα $\alpha_n \to 0$. Για την β_n γράφουμε

$$\beta_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n + 2n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \frac{2n}{5^n}} \to \frac{0+0}{1+0} = 0,$$

διότι $\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0$ (είναι της μορφής a^n με $0 < a < 1$) και $\frac{2n}{5^n} \to 0$ (ελέγξτε το π.χ. με το κριτήριο του λόγου). Για την γ_n παρατηρούμε ότι $1 < 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 < n \cdot n^4 = n^5$, οπότε

$$1 < \gamma_n < \sqrt[n]{n^5} = (\sqrt[n]{n})^5.$$

Αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$, το κριτήριο παρεμβολής δείχνει ότι $\gamma_n \to 1$.

3. (i) Σωστό: αν η (a_n) ήταν άνω φραγμένη, θα υπήρχε $M > 0$ ώστε $a_n \leq M$ για κάθε n. Όμως, αφού $a_n \to +\infty$, γι' αυτό το M θα υπήρχε n_0 ώστε $a_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή $M < a_n \leq M$ για $n \geq n_0$ (άτοπο).

(ii) Σωστό: αφού $a_n \to +\infty$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n > 10$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, ο $b = \min\{10, a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ είναι κάτω φράγμα για την (a_n).

(iii) Λάθος: αν θέσουμε $a_{2k} = 2k$ και $a_{2k-1} = k^3$ τότε $a_n \to +\infty$ αλλά η (a_n) δεν είναι αύξουσα. Για παράδειγμα $a_7 = 64$ και $a_8 = 8$.

4. (α) Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Επιλέγοντας $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $x_n \in \mathbb{R}$ με $|x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Από το κριτήριο παρεμβολής, $x_n \to x_0$. Από την άλλη πλευρά, αφού $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

(β) Δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση. Θα είχαμε $g(1/n) \to g(0)$ από την αρχή της μεταφοράς στο σημείο $x_0 = 0$. Όμως, $g(1/n) = 2n \to +\infty$.

5. Έχουμε $[f(x)]^2 = 1 - x^2$, άρα για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει ακριβώς μία από τις $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ή $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ (παρατηρήστε ότι $f(-1) = f(1) = 0$).

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1,1)$ ώστε $f(x_1) = \sqrt{1-x^2} > 0$ και $f(x_2) = -\sqrt{1-x^2} < 0$. Αφού η f είναι συνεχής, θα υπάρχει y ανάμεσα στα x_1, x_2 ώστε $f(y) = 0$. Όμως τότε $1 - y^2 = 0$, δηλαδή $y = 1$ ή $y = -1$, το οποίο είναι άτοπο (εξηγήστε). Άρα, «$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ για κάθε

$x \in (-1,1)$» ή «$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ για κάθε $x \in (-1,1)$» και έπεται το ζητούμενο διότι στα άκρα ισχύουν και οι δύο.

6. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x > M$, $|f(x) - b| < 1$. Δηλαδή, για κάθε $x > M$ έχουμε

$$|f(x)| \leq |b| + |f(x) - b| < 1 + |b|.$$

Η f είναι συνεχής, άρα είναι φραγμένη στο $[0, M]$. Υπάρχει $D > 0$ ώστε $|f(x)| \leq D$ για κάθε $x \in [0, M]$. Τότε, $|f(x)| \leq \max\{D, 1 + |b|\}$ για κάθε $x \geq 0$. Δηλαδή, η f είναι φραγμένη.

7. (α) Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$. Δείξτε ότι $f'(0) = 0$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου.
(β) Παρατηρήστε ότι

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n + \pi}}\right) = 2\sqrt{2\pi n + \pi} \to +\infty$$

και ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, όλοι τελικά οι όροι της $x_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n + \pi}}$ βρίσκονται στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Άρα, η f' δεν μπορεί να είναι φραγμένη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$.
(γ) Για την ακολουθία (x_n) του (β) έχουμε $f'(x_n) \not\to f'(0)$. Άρα, η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

8. (α) Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Από την υπόθεση είναι $g(a) = g(b)$ και η g ορίζεται καλά στο $[a, b]$ διότι $0 \notin [a, b]$. Υπάρχει $y \in (a, b)$ ώστε

$$g'(y) = \frac{yf'(y) - f(y)}{y^2} = 0$$

και έπεται ότι $f(y) = yf'(y)$.
(β) Μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[10, x]$: για κάθε $x > 10$ υπάρχει $y_x \in (10, x)$ ώστε

$$f(x) = f(10) + f'(y_x)(x - 10) \geq f(10) + \frac{1}{\sqrt{y_x}}(x - 10) \geq f(10) + \frac{1}{\sqrt{x}}(x - 10) = f(10) + \sqrt{x} - \frac{10}{\sqrt{x}}.$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} + f(10) - \frac{10}{\sqrt{x}}\right) = +\infty,$$

έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.