Προσομοίωση 2016-17
Εργασία 2

ΑΣΚΗΣΗ 1. Θεωρούμε μια ουρά αναμονής με ένα υπηρέτη και τα παρακάτω χαρακτηριστικά: Οι χρόνοι μεταξύ αφίξεων πελατών είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν κατανομή $\Gamma(3,1)$. Η πειθαρχία ουράς είναι FCFS.

Έστω $N(t)$ ο αριθμός πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t, με $N(0) = 0$. Η διάρκεια μιας περιόδου απασχόλησης ορίζεται ως εξής: Έστω $T_1 = \min\{t > 0 : N(t) = 1\}$. Επειδή το σύστημα είναι άδειο τη χρονική στιγμή 0, η T_1 ορίζει τη στιγμή της άφιξης ενός πελάτη σε άδειο σύστημα. Επίσης έστω $T_2 = \min\{t > T_1 : N(t) = 0\}$. Η T_2 ορίζει τη στιγμή που ένας πελάτης που αναχωρεί αφήνει πίσω του άδειο σύστημα. Το διάστημα $[T_1, T_2]$ είναι μια περίοδος απασχόλησης του συστήματος (busy period) διάρκειας $B = T_2 - T_1$. Έστω $\theta = E(B)$ η μέση διάρκεια της περιόδου απασχόλησης.

Να προγραμματιστεί μια συνάρτηση Matlab που δημιουργεί μια παρατήρηση της τυχαίας μεταβλητής B μέσω ενός σεναρίου προσομοίωσης και να υπολογιστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το θ βασισμένο σε 10000 παρατηρήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Θεωρούμε μια ουρά αναμονής όπως στην Άσκηση 1, με τη διαφορά ότι υπάρχουν δύο υπηρέτες που λειτουργούν παράλληλα. Έστω ότι αυτό το σύστημα λειτουργεί για δεδομένο χρόνο T, ξεκινώντας τη χρονική στιγμή 0 κενό. Έστω W_j ο χρόνος παραμονής στο σύστημα του $j^{\text{οστού}}$ πελάτη και V_T ο μέσος χρόνος παραμονής των πελατών που εξυπηρετήθηκαν στο διάστημα $[0, T]$, δηλαδή

$$V_T = \frac{\sum_{j=1}^{D(T)} W_j}{D(T)},$$

όπου $D(T)$ ο αριθμός των αναχωρήσεων στο διάστημα $[0, T]$.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τα παρακάτω μεγέθη:

1. $\theta_1 = E(N(T))$
2. $\theta_2 = P(N(T) > 2)$
3. $\theta_3 = E(V_T)$

Να προγραμματιστεί μια συνάρτηση Matlab που δημιουργεί μια παρατήρηση των τυχαίων μεταβλητών $N(T), V_T$ μέσω ενός σεναρίου προσομοίωσης και να υπολογιστούν διαστήματα εμπιστοσύνης για τα $\theta_j, j = 1, 2, 3$, βασισμένα σε 10000 σενάρια.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Θεωρούμε ένα σύστημα παραγγελιών και διαχείρισης αποθεμάτων που λειτουργεί ως εξής: Στην αρχή κάθε περιόδου n ο διαχειριστής της αποθήκης παρατηρεί το ύψος του διαθέσιμου αποθέματος, έστω I_n. Με βάση αυτό κάνει μια παραγγελία στον χονδρέμπορο αυτού του προϊόντος με βάση την παρακάτω πολιτική τύπου (s, S): Αν το απόθεμα είναι κάτω από το επίπεδο s, τότε κάνει παραγγελία ποσότητας τόσης ώστε το απόθεμα να ανέβει στο επίπεδο S, δηλαδή ποσότητας $S - s$. Αν το αρχικό απόθεμα είναι πάνω από s, τότε δεν κάνει παραγγελία. Ισοδύναμα, αν Q_n είναι η ποσότητα παραγγελίας την περίοδο n, τότε ισχύει

$$Q_n = \begin{cases} S - s, & \text{αν } I_n < s \\ 0, & \text{αν } I_n \geq s \end{cases}.$$

Υποθέτουμε ότι η παραγγελία φτάνει ακαριαία από τον προμηθευτή και είναι διαθέσιμη για την κάλυψη της ζήτησης κατά την περίοδο n, μαζί με το αρχικό απόθεμα.

Η ζήτηση κατά τη διάρκεια της περιόδου n είναι τυχαία μεταβλητή X_n, που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ. Οι ποσότητες ζήτησης διαδοχικών περιόδων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Κατά τη διάρκεια της περιόδου ικανοποιείται η ζήτηση από το υπάρχον απόθεμα. Αν διαπιστωθούν ελλείψεις αυτές μεταφράζονται σε χαμένες πωλήσεις. Επομένως η ποσότητα που θα πωληθεί στη διάρκεια της περιόδου είναι ίση με

$$S_n = \min(I_n + Q_n, X_n).$$

Αν η ποσότητα που θα πωληθεί είναι μικρότερη από το υπάρχον απόθεμα, τότε το υπόλοιπο μεταφέρεται στην επόμενη περίοδο. Επομένως το αρχικό απόθεμα της περιόδου $n+1$ είναι ίσο με

$$I_{n+1} = \max(I_n + Q_n - X_n, 0).$$

Κατά την περίοδο $n+1$ επαναλαμβάνεται η προηγούμενη διαδικασία με νέα παραγγελία Q_{n+1}, ζήτηση X_{n+1}, κ.ο.κ.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για συνολικό αριθμό T περιόδων, δηλαδή για $n = 1, 2, \ldots, T$. Στο τέλος της περιόδου T το τελικό απόθεμα I_{T+1} πωλείται σε δευτερογενή αγορά με μειωμένη τιμή.

Όσον αφορά τις οικονομικές παραμέτρους του προβλήματος, υποθέτουμε τα εξής:

- Η τιμή πώλησης του προϊόντος στους τελικούς πελάτες είναι r ανά μονάδα προϊόντος, επομένως τα έσοδα από τις πωλήσεις της περιόδου n είναι ίσα με rS_n.

- Η τιμή χονδρικής προμήθειας του προϊόντος είναι ίση με w ανά μονάδα, επομένως το κόστος αγοράς του προϊόντος την περίοδο n είναι ίσο με wQ_n.

- Σε κάθε περίοδο που γίνεται παραγγελία, δηλαδή αν $Q_n > 0$, υπάρχει ένα επιπλέον σταθερό κόστος ίσο με K, ανεξάρτητα από την ποσότητα που παραγγέλλεται. Το κόστος αυτό αντιστοιχεί σε πάγια κόστη διαχείρισης παραγγελίας και παράδοσης του προϊόντος στην αποθήκη. Η ύπαρξή του δίνει κίνητρο στον διαχειριστή του αποθέματος να κάνει μεγάλες παραγγελίες κάθε φορά που παραγγέλλει προϊόν από τον προμηθευτή, έτσι ώστε το σταθερό κόστος να μην πληρώνεται συχνά.

- Το κόστος αποθήκευσης του προϊόντος είναι ίσο με h ανά περίοδο και ανά μονάδα προϊόντος. Επομένως κατά την περίοδο n το κόστος αποθήκευσης είναι ίσο με hI_{n+1}, δηλαδή ανάλογο με την ποσότητα που μεταφέρεται ως απόθεμα από την περίοδο n στην επόμενη. Η ύπαρξη του κόστους αποθέματος δίνει κίνητρο στο διαχειριστή να κάνει μικρές παραγγελίες έτσι ώστε να μη χρειάζεται να αποθηκεύει μεγάλες ποσότητες.

Επομένως το καθαρό κέρδος κατά την περίοδο n είναι ίσο με

$$P_n = \begin{cases} rS_n - hI_{n+1}, & \text{αν } \; Q_n = 0 \\ rS_n - K - wQ_n - hI_{n+1}, & \text{αν } \; Q_n > 0 \end{cases} .$$

Στο τέλος της περιόδου T η υπόλοιπη ποσότητα που απομένει στο απόθεμα I_{T+1} πωλείται σε τιμή r_1 ανά μονάδα (με $r_1 < w$).

Το συνολικό καθαρό κέρδος κατά τη διάρκεια των T περιόδων είναι

$$R_T = \sum_{n=0}^{T} P_n + r_1 I_{T+1}.$$

Έστω τώρα η μέση τιμή του συνολικού κέρδους των T περιόδων ως συνάρτηση της πολιτικής (s, S) και των υπόλοιπων παραμέτρων του προβλήματος

$$\theta(r, w, r_1, K, h, \mu, \sigma, s, S) = E(R_T).$$

Θέλουμε να εκτιμήσουμε το κέρδος μέσω προσομοίωσης για διάφορες τιμές των s, S.

Να προγραμματιστεί μια συνάρτηση Matlab που δημιουργεί μια παρατήρηση της τυχαίας μεταβλητής R_T, όπως επίσης και μια δεύτερη συνάρτηση που δημιουργεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης $(1-\alpha)$ για το θ, βασισμένο σε 10000 σενάρια.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Στο μοντέλο της Άσκησης 1 να εφαρμοστεί η μέθοδος μείωσης διασποράς με μεταβλητή ελέγχου τον αριθμό των αφίξεων στη διάρκεια μιας περιόδου απασχόλησης και να εκτιμηθεί το ποσοστό μείωσης της τυπικής απόκλισης της εκτίμησης του θ.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την παράμετρο $\theta = \sqrt{EX^2}$, όπου $X = \min\{k : U_1 + \ldots + U_k > a\}$, και $U_1, \ldots, U_k$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $U(0,1)$. Έστω επίσης ότι παίρνουμε δείγμα $(Q_1, \ldots, Q_n)$ προσομοιώνοντας n σενάρια της X και εκτιμούμε το θ μέσω της εκτιμήτριας

$$T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n Q_i^2}{n}}$$

. Επειδή η T δεν είναι αμερόληπτη, θέλουμε να εκτιμήσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της $M = E(T-\theta)^2$ και να υπολογίσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για το θ, βασισμένο στην T, χρησιμοποιώντας δειγματοληψία bootstrap από το δείγμα x.

(α) Έστω ότι παίρνουμε ένα συγκεκριμένο δείγμα $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$ η τιμή της εκτιμήτριας T που προκύπτει από αυτό το δείγμα και F_e η εμπειρική κατανομή του δείγματος x. Δείξτε ότι

$$E_{Fe} X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

και $\theta_{Fe} = t$. Επομένως μια προσέγγιση του M είναι

$$\tilde{M} = E_{Fe}(T - \theta_{Fe})^2 = E_{Fe}(T - t)^2.$$

(Προσοχή: Εδώ η θ_{Fe} είναι η εκτίμηση της θ με βάση την εμπειρική κατανομή και συμβαίνει να ταυτίζεται με την τιμή t της εκτιμήτριας που έχει προκύψει από το δείγμα x. Από την άλλη πλευρά, η T εδώ συνεχίζει να είναι η εκτιμήτρια που έχουμε ορίσει, αλλά κάτω από την κατανομή $X \sim F_e$.)
(β) Έστω $n = 10$. Δημιουργήστε ένα δείγμα $x = x_1, \dots, x_n$. Υπολογίστε την τιμή του θ_{Fe}.
(γ) Έστω $N = 10000$. Δημιουργήστε N bootstrap δείγματα μεγέθους n από το αρχικό δείγμα x και υποιλογίστε τις τιμές της εκτιμήτριας $T_j, j = 1, \dots, N$ για κάθε δείγμα.
(δ) Υπολογίστε μια εκτίμηση του $\tilde{M}$:

$$\hat{\tilde{M}} = \frac{\sum_{j=1}^{N}(T_j - t)^2}{n}.$$

(ε) Για να υπολογίσουμε ένα προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης $(1 - \alpha)100\%$ για το θ, δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας την εκτίμηση του M, επειδή δε γνωρίζουμε την κατανομή της $(T - \theta)^2$. Μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής προσέγγιση: Από τις παρατηρήσεις $(T_1, \dots, T_N)$ υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές των $((T_1 - t), \dots, (T_N - t))$ και βρίσκουμε τα ποσοστημόρια $\alpha/2, 1 - \alpha/2$ του διανύσματος αυτού. (Για να το κάνουμε αυτό βάζουμε το διάνυσμα σε αύξουσα σειρά και αποκόπτουμε τα χαμηλότερα και ψηλότερα κλάσματα $\alpha/2$ παρατηρήσεων αντίστοιχα.). Τα ποσοστημόρια αυτά, έστω L, U έχουν (προσεγγιστικά) την ιδιότητα $P_{Fe}(L \leq (T - t) \leq U) = 1 - \alpha$. Δείξτε ότι το προσεγγιστικό διάστημα εμπιστοσύνης που παράγεται από την παραπάνω σχέση είναι

$$T - U \leq \theta \leq T - L.$$

(στ) Υπολογίστε το διάστημα εμπιστοσύνης για το θ με βάση την παραπάνω προσέγγιση για το δείγμα x που έχετε προσομοιώσει.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Να γραφεί μια συνάρτηση Matlab που υλοποιεί την άσκηση 8.3 του Ross.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Ross: Άσκηση 8.10

ΑΣΚΗΣΗ 8. Ross: Άσκηση 8.18

ΑΣΚΗΣΗ 9. Να γραφεί μια συνάρτηση Matlab που υλοποιεί την άσκηση 10.28 του Ross, με χρήση της μεθόδου Importance Sampling για μείωση της διασποράς.