

Προσομοίωση Εξετάσεις Περιόδου Σεπτεμβρίου 2009

Πρόβλημα 1. Έστω ότι ο χρόνος λειτουργίας ενός μηχανήματος είναι τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 10]$. Έστω επίσης ότι έχουμε δύο μηχανήματα με ανεξάρτητους χρόνους λειτουργίας όπως το παραπάνω, λειτουργούμε πρώτα το ένα και όταν σταματήσει λειτουργούμε και το δεύτερο. Έστω Y ο συνολικός χρόνος λειτουργίας των δύο μηχανημάτων.

Περιγράψτε δύο διαφορετικούς τρόπους δημιουργίας ψευδοτυχαίων αριθμών από την κατανομή της Y .

Πρόβλημα 2. Έστω η τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{20}{3}(x - 3x^3 + 2x^4), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Θέλουμε να δημιουργήσουμε ψευδοτυχαία δείγματα από αυτή την κατανομή, χρησιμοποιώντας την μέθοδο απόρριψης. Ως βασική κατανομή παίρνουμε την δευτεροβάθμια

$$g(x) = 6x(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Να περιγραφεί η μέθοδος απόρριψης και να βρεθεί ο αναμενόμενος αριθμός επαναλήψεων για τη δημιουργία ενός δείγματος.

Πρόβλημα 3. Η τ.μ. Y που ακολουθεί κατανομή Γάμμα

$$f(y) = ye^{-y}, \quad y > 0.$$

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα $\theta = P(Y^2 \leq t)$, για κάποιο $t > 0$, με προσομοίωση.

(α) Να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το θ βασισμένη στην απλή μέθοδο Monte Carlo με 1000 σενάρια (πάρτε κρίσιμη τιμή της κατανομής t ίση με 1.96).

(β) Να επαναληφθεί το ερώτημα (α) χρησιμοποιώντας την Y ως μεταβλητή ελέγχου.

Πρόβλημα 4. Έστω το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X, Y) με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y) = Ce^{-x-y-xy}, \quad x, y > 0.$$

Να περιγραφεί η μέθοδος Gibbs sampler για τη δημιουργία ενός ζεύγους από την παραπάνω κατανομή.