1-6-2023

Άσκηση 1 Αναφορικά μια μέθοδο Monte Carlo για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του

$$A = \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{x+2y}\, e^{-5x^2-3y}\, dy\, dx .$$

(a) Μετασχ. μεταβλητών $u = e^{-x}$, $v = e^{-y}$ $\left.\begin{matrix} \\ u\in(0,1) \quad v\in(0,1)\end{matrix}\right\} = -$

$$A = \dots = \int_0^1 \int_0^1 h(u,v)\, dv\, du = E[h(U,V)]$$

U, V iid $U(0,1)$

(b) $v = x^2 \Rightarrow \dots A = \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(v,y)\, e^{-5v} e^{-3y}\, dy\, dv$

$$= E\left[h_1(V,Y)\right],$$

V, Y ανεξ

$V \sim Exp(5)$

$Y \sim Exp(3)$

(γ) $$A = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} \sqrt{x+2y}\; 1(x>0)\, e^{-5x^2-3y}\, dy\, dx$$

$$e^{-5x^2} \rightarrow X \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{10}\right)$$

$$e^{-5x^2} = e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{10}}} \rightarrow \sigma^2$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}}} e^{-5x^2},$$

$$Y \sim \mathcal{E}xp(3) = f_Y(y) = 3e^{-3y}$$

$$A = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\sqrt{\frac{\pi}{5}}\ \frac{1}{3} \sqrt{x+2y}\ 1(x>0)}}_{h_2(x,y)} f_X(x)\, f_Y(y)\, dy\, dx.$$

$$= E\left[h_2(X,Y)\right], \quad \begin{array}{l} X \sim \mathcal{N}(0, 1/10) \\ Y \sim \mathcal{E}xp(3) \end{array}$$ <u>ανεξάρτητες.</u>

$= \ldots$ Monte Carlo

(σ) $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \Rightarrow Z = |X| \ldots f_Z(z) \ldots$

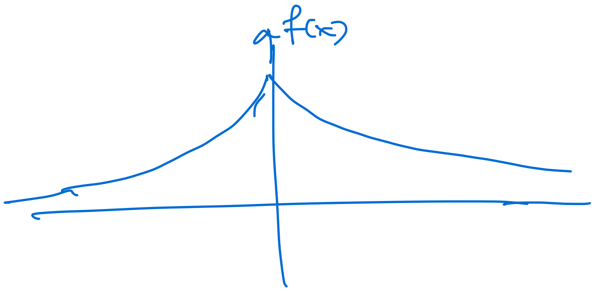
$$f_Z(z) = 2 f_X(z), \quad z > 0$$

$\ldots$

Άσκηση 3

X_1, X_2 iid $\sim$ διπλή εκθετική

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$



$$\theta = P(X_1 + X_2 > 5)$$

(a) Monte Carlo (απλή)

(b) Μέσω δεσμευμένης χρησιμοπ. της X_1 ως μεταβλητή δεσμευμένης

(a) $\theta = P(X_1 + X_2 > 5) = E\left(1(X_1 + X_2 > 5)\right)$

Γεννήτρια από $\underline{f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}}$, $x \in \mathbb{R}$:

$Y \sim Exp(1)$

$$X = \begin{cases} Y & \text{με πιθ. } 1/2 \\ -Y & \text{'' '' } 1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Γεννήτρια} \begin{cases} ① \; Y \sim Exp(1), \; U \sim U(0,1) \\ ② \; X = \begin{cases} Y, & U < 1/2 \\ -Y, & U > 1/2 \end{cases} \end{cases}} \Rightarrow X$$

Εναλλακτικά υπολογίζουμε $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|y|} dy$ κ' γεννήτρια αντιστροφής

$$\theta = E\left(1(X_1 + X_2 > 5)\right) \quad , \quad X_1, X_2 \text{ iid } X$$

(b) $$\theta = E\Big[\underbrace{E\big(1(X_1+X_2>5) \mid X_1\big)}_{m(X_1)}\Big]$$

$$m(x_1) = E\left[1(x_1 + X_2 > 5) \mid X_1 = x_1\right]$$

$$= E\left[1(x_1 + X_2 > 5)\right] = P\left(X_2 > 5 - x_1\right) \leftarrow \text{ανεξάρτητα}$$

$$= 1 - F(5 - x_1) \quad ,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{-|y|}\, dy = \begin{cases} \dots & y < 0 \\ \dots & y > 0 \end{cases}$$

Άσκηση 3

X τμ.

$$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$a_j \ge 0 \ \forall j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j = 1$$

Προτείνετε δύο γεννήτορες από X

(a) Μείξη
$$X = \begin{cases} X_1 & \text{μ.π. } a_1 \\ & \phantom{\text{μ.π. }} a_2 \\ \vdots & \\ X_n & \text{μ.π. } a_n \end{cases}$$

$$X_j : F_j(x) = x^j \ , \quad x \in [0,1]$$

Γεννήτρια από X_j

$$F_j(x) = x^j \Rightarrow F(X_j) = U \Rightarrow \boxed{X_j = U^{1/j}}$$

Αλγόριθμος μείξης για X

① Δημιουργούμε $Y \in \{1, \dots, n\}$ με $P(Y=j) = a_j$

② Αν $Y = j$, $U \sim U(0,1) \Rightarrow X = U^{1/j}$

(β) Accept/Reject

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}, \quad x \in [0,1]$$

$$g(x) = 1 \; (x \in [0,1])$$

$$c = \sup \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_{x \in [0,1]} \left(\underbrace{a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}}_{\uparrow x} \right)$$

$$c = \sum_{j=1}^{n} j a_j$$

Αλγόριθμος

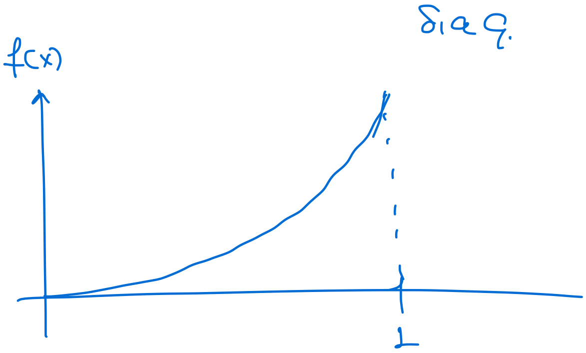
① $Y \sim U(0,1)$

② Αν $Y = y$

$U \sim U(0,1)$

Αν $U < \frac{f(y)}{c} \Rightarrow X = y$

διαφ. $\Rightarrow$ reject Y, return to ①.



Άσκηση 4

Σε κάθε περίοδο ζητά εξυπηρέτηση ακριβώς ένας πελάτης

Έστω R_t ο πελάτης που ζητά την περίοδο t, $t=1,2,\dots$

$R_1, R_2, \dots$ iid $\quad P(R_1=i)=P_i$, $i=1,\dots,n$

Ένας κινούμενος σταθμός εξυπηρέτησης μετακινείται κάθε φορά από την προηγούμενη θέση του στη θέση του πελάτη που ζητάει εξυπηρέτηση

Έστω Y_t η απόσταση που διανύει ο σταθμός κατά την περίοδο t

R_0 : η αρχική θέση του σταθμού, $R_0 \in \{1,\dots,n\}$

$$\theta(T,i) = E\left[\sum_{t=1}^{T} Y_t \,\middle|\, R_0 = i\right]$$

η συνολική απόσταση που θα διανυθεί σε T περιόδους

$$i^* : \theta(T,i^*) = \min_{i=1,\dots,n} \theta(T,i)$$

$$A = \text{argmin}\left(\theta(T,i),\ i=1,\dots,n\right)$$

Να βρεθεί μια i^* μέσω Monte Carlo.

Εκτίμηση $\theta(T,i)$ μέσω Monte Carlo.

Παρατήρηση : $Y_t = |R_t - R_{t-1}|$

$$\theta = E(X \mid R_0 = i)$$

$$X = \sum_{t=1}^{T} |R_t - R_{t-1}| ,$$ όπου $R_0 = i$, $R_1, \dots, R_T$ iid $\sim P$

Σε κάθε επανάληψη (γεννήτρια της X)

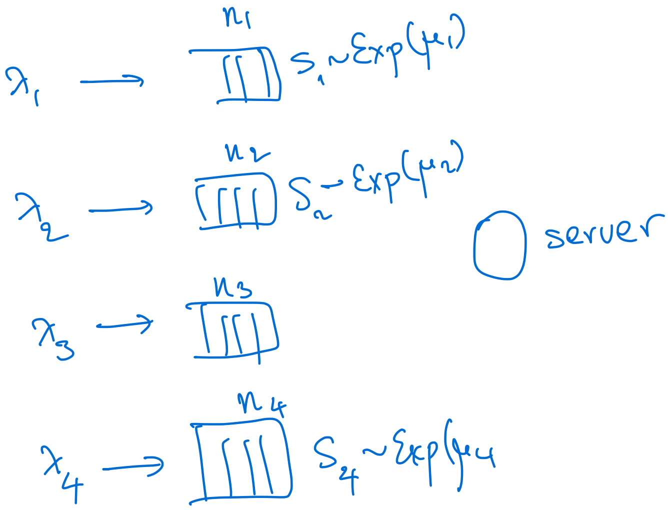
① Δημ. $R_1, \dots, R_T \sim R$

Στο R: `R = sample(1:n, T, replace=T, prob=P)`

② $$X = \sum_{j=1}^{T} |R_j - R_{j-1}|$$

$X_1, \dots, X_N$ από X $\Rightarrow$ $\hat{\theta}(T,i) = \overline{X}_N$

Επεκτάσεις



Ασκηση 5

(X,Y) $\quad f(x,y) = \lambda x e^{-(\lambda+y)x}, \quad x,y \geq 0$

Να περιγραφεί αλγόριθμος Gibbs.

$$f_X(x) = \int_0^\infty \lambda x e^{-(\lambda+y)x}\, dy =$$

$$= \lambda e^{-\lambda x} \int_0^\infty \underbrace{x e^{-xy}}_{Y \sim Exp(x)} dy = \lambda e^{-\lambda x} \qquad X \sim Exp(\lambda)$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \lambda x\, e^{-(\lambda+y)x}\, dx \qquad (\alpha = 2,\ \mu = \lambda + y)$$

Gama (α, μ)

$$\frac{\mu^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\mu x}}{\Gamma(\alpha)}$$

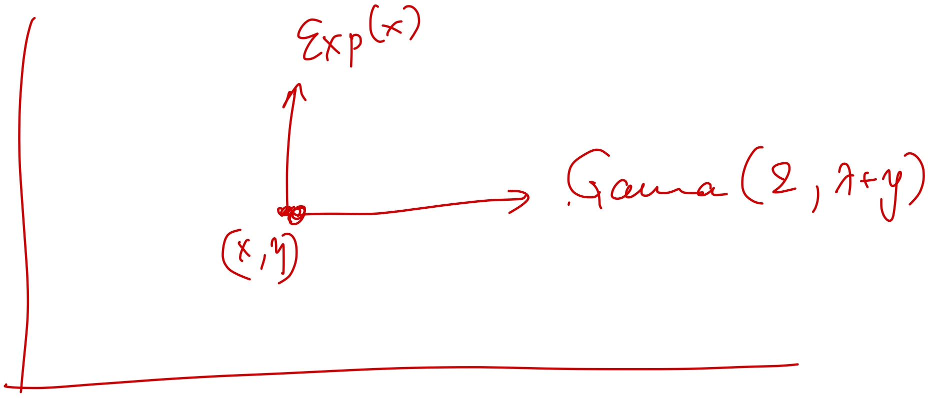
$$= \int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda+y)^2} \underbrace{\frac{(\lambda+y)^2 \, x \, e^{-(\lambda+y)x}}{1!}} = \underline{\frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}}, \quad y \geq 0.$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\cancel{\lambda} x e^{-(\lambda+y)}}{\frac{\cancel{\lambda}}{(\lambda+y)^2}} = (\lambda+y)^2 x\, e^{-(\lambda+y)x}$$

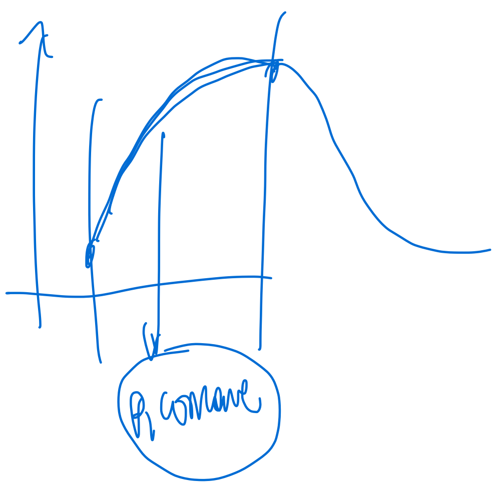
$$\boxed{X | Y = y \sim \text{Gama}(2, \lambda + y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\cancel{\lambda}\, x\, e^{-(\lambda+y)x}}{\cancel{\lambda}\, e^{-\lambda x}} =$$

$$= x e^{-xy}, \quad \boxed{Y \mid X = x \sim \mathcal{E}xp(x)}$$



related model



Cachon + Feldman

Heterogeneous customers in monopoly

Peruse vs Subscription pricing

$(Y-H) \quad h(Y)$

$$Y = Q\left(g(\lambda_1, \lambda_2)\right)$$

$$(Y-H) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda \bar{F}(Y)}$$