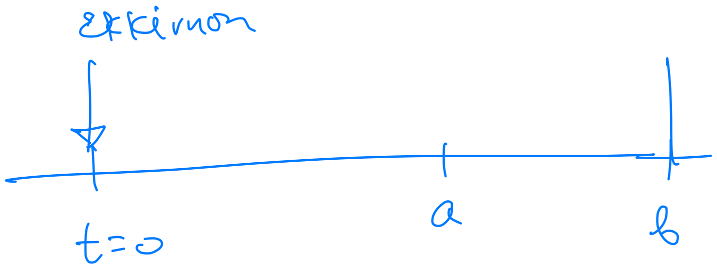
5-4-2023

Παράδειγμα

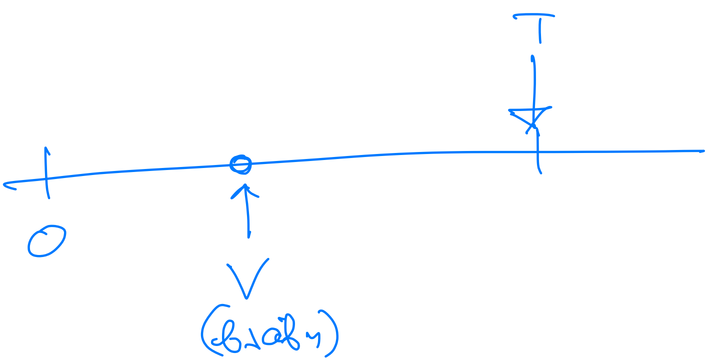
Μηχάνημα παθαίνει βλάβες, επιθεωρείται, επισκευάζεται/αντικαθίσταται.

Χρόνος λειτουργίας $\doteq V \sim Exp(\lambda)$



Χρόνος επιθεώρησης (από την αρχή λειτουργίας (κύκλου)) $T \sim \mathcal{U}(a,b)$

Μετά την επιθεώρηση μηχάνημα είναι σαν καινούργιο.



Κανονική λειτουργία: έσοδο $= r_1$/μον. χρόνου

Σε βλάβη: έσοδο $= r_2$/μον. χρ.

$r_2 < r_1$

Κόστος αντικατάστασης C

Μέσο καθαρό κέρδος / μονάδα χρόνου

Κύκλος : χρόνος μεταξύ δύο επιθεωρήσεων

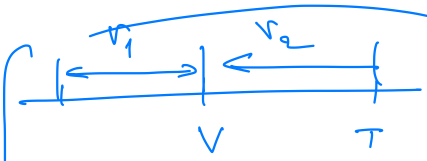
$$\theta = \frac{E(R)}{E(X)}$$

S : κέρδος κύκλου $= R(V,T)$ $\qquad V \sim Exp(\lambda)$

X = μήκος κύκλου $= X(V,T)$ $\qquad T \sim \mathcal{U}(a,b)$.

$X = T$

$$S = \begin{cases} r_1 V + r_2(T-V) - C, & \text{αν } V<T \\ r_1 T, & \text{αν } V>T \end{cases}$$



$S = -C + r_1 V + r_2 (T-V)$

$S = r_1 \cdot T$

$$\boxed{S = r_1 \cdot \min(V,T) + r_2 \max(T-V,0) - C \cdot 1(V<T)}$$

$X = T$

① Προσομοιώνουμε n κύκλους

$j \in \{1,\dots,n\}$

$t_j \sim \mathcal{U}(a,b)$

$v_j \sim Exp(\lambda)$

$S_j = r_1 \min(V_j,T_j) + r_2 \max(T_j - V_j, 0) - C\, 1(V_j<T_j)$

$$\boxed{\theta(F_e) = \frac{\bar{S}_n}{\bar{t}_n}}$$

② Bootstrap.

Έστω ότι $\hat{\theta} = \dfrac{\bar{S}}{\bar{T}_n}$

Για $k = 1, \dots, N$

$$\left\{ \underbrace{n \text{ παρατηρήσεις με επανάθεση}}_{\text{προσομοίωση}} \text{ από } \begin{bmatrix} (t_1, s_1) \\ \vdots \\ (t_n, S_n) \end{bmatrix} \right.$$

Έστω $\begin{bmatrix} (T_{k1}, S_{k1}) \\ \vdots \\ (T_{kn}, S_{kn}) \end{bmatrix}$

$$\left. \hat{\theta}_k = \frac{\bar{S}_k}{\bar{T}_k} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_{kj}}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T_{kj}} \right\}$$

$$\text{biasest} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{\theta}_k - \theta(F_e)\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\bar{S}_k}{\bar{T}_k} - \frac{\bar{S}_n}{\bar{t}_n}\right)$$

$$\text{MSEest} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\hat{\theta}_k - \theta(F_e)\right)^2$$

Για την προσομοίωση της Διακρ. Ομ.

$$m = \begin{bmatrix} (t_1, s_1) \\ \vdots \\ (t_n, s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 & s_1 \\ t_2 & s_2 \\ \vdots & \\ t_n & s_n \end{bmatrix}$$

(παίρνουμε n παρ. με επανάληψη).

R:

```
l = sample(1:n, n, replace=T)

y = m[l, ]
```

π.χ. αν $l = c(1, 2, 1, 3)$ $(n = 4)$

$$\begin{bmatrix} t_1 & s_1 \\ t_2 & s_2 \\ t_3 & s_3 \\ t_4 & s_4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} t_1 & s_1 \\ t_2 & s_2 \\ t_1 & s_1 \\ t_3 & s_3 \end{bmatrix}$$

Μέθοδοι Μείωσης Διασποράς στην Προσομοίωση Monte Carlo

Monte Carlo

Έστω $X \sim F$

$$\theta = E(X)$$

Προσομοιώνουμε $(x_1, \dots, x_n) \sim F \Rightarrow \hat{\theta} = \bar{x}_n$

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\bar{X}_n - \theta)^2 = Var(\bar{X}_n) = \underline{\frac{Var(X)}{n}}$$

ΔΕ : $\bar{x}_n \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S_X}{\sqrt{n}}$

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_j - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \left(E(S^2) = Var(X) = \sigma_X^2 \right)$$

αν μπορούμε να βρούμε μια άλλη τμ. Y (όχι ανεξ. την X)

τέτοια ώστε
$$E(Y) = \theta$$
$$Var(Y) = \sigma_Y^2 < \sigma_X^2$$

τότε αν έχουμε δείγμα $(y_1, \dots, y_n) \sim F_Y$

ΔΕ : $\bar{y}_n \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S_Y}{\sqrt{n}}$

Παράδειγμα Προσομοίωση σπάνιων γεγονότων

Έστω $Z \sim F$

$$\theta = E(Z \mid Z > \alpha)$$

όπου $p = P(Z > \alpha) \simeq 0$

$\exists$ γεννήτρια από F

Δημιουργούμε γεννήτρια από $Z \mid Z > \alpha$ μέσω accept reject.

① Έστω $Z \sim F$

② αν $Z > \alpha \Rightarrow X = Z$ $\Rightarrow X$

διαφ. απορρ. επιστρ. στο ①

$$\hat{\theta} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}, \quad n \text{ "μεγάλο"} \quad (\pi.\chi.\ n = 1000)$$

όμως αν $p = 10^{-9}$ ο μέσος αριθμός βημάτων για τη δημιουργία μιας πραγματοποίησης είναι $\simeq 10^9$ με αποτέλεσμα ο συνολικός χρόνος δημιουργίας του δείγματος να είναι απαγορευτικός