

Εναλλακτική προσέγγιση στους ολοκληρωτικούς τελεστές

Στη συνέχεια ¹ τα X και Y θα είναι συμπαγή διαστήματα του \mathbb{R} .

Στόχος Αν δοθεί $k \in L^2(X \times Y)$, να ορίσουμε φραγμένο τελεστή $A_k : L^2(Y) \rightarrow L^2(X)$ (μάλιστα συμπαγή) ώστε, όταν η k είναι συνεχής στο $X \times Y$, να έχουμε

$$(A_k f)(x) = \int_Y k(x, y) f(y) dy \quad f \in C(Y). \quad (1)$$

Για $f \in C(Y)$, $g \in C(X)$ ορίζουμε την συνάρτηση $g \otimes \bar{f}$ από την σχέση

$$(g \otimes \bar{f})(x, y) := g(x) \bar{f}(y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Παρατήρησε ότι $g \otimes \bar{f} \in C(X \times Y) \subseteq L^2(X \times Y)$ και μάλιστα

$$\|g \otimes \bar{f}\|_{XY}^2 = \iint |g(x) \bar{f}(y)|^2 dx dy = \int |g(x)|^2 dx \int |\bar{f}(y)|^2 dy = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2$$

(όπου συμβολίζουμε εδώ για ευκολία με $\|\cdot\|_{XY}$ τη νόρμα του $L^2(X \times Y)$ που επάγεται από το εσωτερικό του γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle_{XY}$).

Αφού $k \in L^2(X \times Y)$ και $g \otimes \bar{f} \in L^2(X \times Y)$, το εσωτερικό γινόμενο $\langle k, g \otimes \bar{f} \rangle_{XY}$ ορίζεται.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi_k : C(Y) \times C(X) \rightarrow \mathbb{C} : (f, g) \mapsto \langle k, g \otimes \bar{f} \rangle_{XY}.$$

Παρατηρούμε ότι

- η $C(Y) \rightarrow \mathbb{C} : f \mapsto \phi_k(f, g)$ είναι γραμμική για κάθε $g \in C(X)$
- η $C(X) \rightarrow \mathbb{C} : g \mapsto \phi_k(f, g)$ είναι αντιγραμμική για κάθε $f \in C(Y)$
- $|\phi_k(f, g)| = |\langle k, g \otimes \bar{f} \rangle| \leq \|k\|_{XY} \|g \otimes \bar{f}\|_{XY} = \|k\|_{XY} \|f\|_2 \|g\|_2$ για κάθε $f \in C(Y)$, $g \in C(X)$.

Συνεπώς η ϕ_k είναι $\|\cdot\|_2$ -φραγμένη sesquilinear μορφή στο $(C(Y), \|\cdot\|_2) \times (C(X), \|\cdot\|_2)$. Επομένως επεκτείνεται (όπως έχουμε δείξει) σε φραγμένη sesquilinear μορφή στο $L^2(Y) \times L^2(X)$. Κατά συνέπεια, από το Θεώρημα Riesz,

Υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A_k : L^2(Y) \rightarrow L^2(X)$ ώστε

$$\langle A_k f, g \rangle = \phi_k(f, g) = \langle k, g \otimes \bar{f} \rangle_{XY} \quad \text{για } g \in L^2(X), f \in L^2(Y)$$

και μάλιστα

$$|\langle A_k g, f \rangle| = |\langle k, g \otimes \bar{f} \rangle_{XY}| \leq \|k\|_{XY} \|f\|_2 \|g\|_2$$

πράγμα που δείχνει αμέσως την χρήσιμη ανισότητα

$$\|A_k\| \leq \|k\|_{XY}. \quad (2)$$

Όταν η k είναι συνεχής στο $X \times Y$, ο A_k ικανοποιεί την (1). Πράγματι, αν πάρουμε τις g και f συνεχείς, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int (A_k f)(x) \bar{g}(x) dx &= \langle A_k f, g \rangle = \langle k, g \otimes \bar{f} \rangle_{XY} \\ &= \iint k(x, y) \overline{(g \otimes \bar{f})(x, y)} dx dy \\ &= \iint k(x, y) \overline{g(x) \bar{f}(y)} dx dy \\ &= \int \left(\int k(x, y) f(y) dy \right) \bar{g}(x) dx \end{aligned} \quad (3)$$

και αφού η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε $g \in C(X)$, έπεται ότι $(A_k f)(x) = \int k(x, y) f(y) dy$.

¹intops 24 Δεκεμβρίου 2022

Πρόταση 1. Για κάθε $k \in L^2(X \times Y)$, ο τελεστής $A_k : L^2(Y) \rightarrow L^2(X)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του $L^2(X \times Y)$, υπάρχει ακολουθία (k_n) συνεχών συναρτήσεων στο $X \times Y$ ώστε

$$\|k - k_n\|_{XY} \rightarrow 0.$$

Έπεται από την (2) ότι

$$\|A_k - A_{k_n}\| \leq \|k - k_n\|_{XY} \rightarrow 0$$

επομένως, αν κάθε A_{k_n} είναι συμπαγής, τότε και ο A_k θα είναι συμπαγής. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ο A_k είναι συμπαγής όταν η k είναι συνεχής συνάρτηση.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να παρατηρήσουμε ότι ένας ολοκληρωτικός τελεστής που ο πυρήνας του είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ορθογωνίου ορίζει τελεστή πρώτης τάξης, και να προσεγγίσουμε τον A_k ως προς τη νόρμα τελεστή από ολοκληρωτικούς τελεστές με τέτοιους πυρήνες.

Παρατήρηση 2. Αν $k_0(x, y) = k_1(x)\bar{k}_2(y)$ όπου k_1 και k_2 είναι Riemann ολοκληρώσιμες στα X και Y , τότε ο τελεστής A_{k_0} (ορίζεται και) είναι φραγμένος τελεστής πρώτης τάξης.

Συνεπώς αν η συνάρτηση k είναι γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων «χωριζομένων μεταβλητών» (όπως η k_0) τότε ο A_k έχει πεπερασμένη τάξη, άρα είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Για f, g συνεχείς έχουμε από την (3)

$$\begin{aligned} \langle A_k f, g \rangle &= \iint k_1(x)\bar{k}_2(y)\overline{g(x)f(y)} dx dy \\ &= \left(\int f(y)\bar{k}_2(y) dy \right) \left(\int k_1(x)\bar{g}(x) dx \right) \\ &= \langle f, k_2 \rangle \langle k_1, g \rangle = \langle \langle f, k_2 \rangle k_1, g \rangle = \langle (k_1 k_2^*)(f), g \rangle \end{aligned}$$

επομένως $A_{k_0}(f) = (k_1 k_2^*)(f)$, άρα

$$A_{k_0} = k_1 k_2^*.$$

• Έπεται λοιπόν από την ανισότητα (2) πως αν δείξουμε ότι κάθε $k \in C(X \times Y)$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα του $L^2(X \times Y)$ (!) από γραμμικούς συνδυασμούς συναρτήσεων «χωριζομένων μεταβλητών» θα έχουμε δείξει ότι ο A_k είναι συμπαγής τελεστής.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 3. Αν $k : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων $R_{1,1}, \dots, R_{n,n}$ στο $X \times Y$ και $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} \in \mathbb{C}$ ώστε ²

$$\text{αν } k_\epsilon = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_{R_{i,j}} \quad \text{τότε } \|k - k_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon.$$

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της k , για το $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν (x, y) και (s, t) είναι σημεία του $X \times Y$ που ικανοποιούν $\max\{|x-s|, |y-t|\} < \delta$, τότε $|k(x, y) - k(s, t)| < \epsilon$.

Ας διαμερίσουμε τώρα το $X \times Y = [a, b] \times [c, d]$ σε πεπερασμένο πλήθος ξένων ανά δύο ορθογωνίων με πλευρές μήκους μικρότερου από δ : για παράδειγμα, ας διαλέξουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{n} < \delta$ και $\frac{d-c}{n} < \delta$, και ας θέσουμε $R_{i,j} = I_i \times J_j$, όπου $I_i = [\frac{(i-1)(b-a)}{n}, \frac{i(b-a)}{n})$ όταν $i = 1, \dots, n-1$ και $I_n = [\frac{(n-1)(b-a)}{n}, b]$ (και αντίστοιχα για τα $J_j \subseteq [c, d]$).

²Έτσι δεν δείχνουμε στον Απειρ. ΙΙΙ ότι κάθε συνεχής συνάρτηση στο $X \times Y$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη;

Κάθε $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ ανήκει σε ακριβώς ένα ορθογώνιο R_{i_x, j_y} , οπότε
 $|k(x, y) - k(\frac{(i_x-1)(b-a)}{n}, \frac{(j_y-1)(d-c)}{n})| < \epsilon$. Επομένως αν ορίσουμε $a_{i,j} = k(\frac{(i-1)(b-a)}{n}, \frac{(j-1)(d-c)}{n})$ και

$$k_\epsilon = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_{R_{i,j}}$$

τότε

$$|k(x, y) - k_\epsilon(x, y)| = |k(x, y) - a_{i_x, j_y}| < \epsilon.$$

Έπεται ότι

$$\sup\{|k(x, y) - k_\epsilon(x, y)| : (x, y) \in X \times Y\} \leq \epsilon. \quad \square$$

Συνοψίζουμε: Έστω $k \in L^2(X \times Y)$. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $k_1 \in C(X \times Y)$ ώστε $\|k - k_1\|_{XY} < \epsilon$. Από το Λήμμα 3, υπάρχει $k_\epsilon = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_{R_{i,j}}$ ώστε $\|k - k_\epsilon\|_\infty \leq \epsilon$ και επομένως

$$\|k - k_\epsilon\|_{XY} \leq (b-a)(d-c)\epsilon.$$

Όμως $\chi_{R_{i,j}}(x, y) = \chi_{I_i}(x) \chi_{J_j}(y)$ και συνεπώς (αφού οι χ_{I_i} και χ_{J_j} είναι Riemann-ολοκληρώσιμες)

$$A_{\chi_{R_{i,j}}} = \chi_{I_i} \chi_{J_j}^*$$

από την Παρατήρηση 2. Άρα

$$A_{k_\epsilon} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \chi_{I_i} \chi_{J_j}^*$$

έχει πεπερασμένη τάξη, και τελικά

$$\|A_k - A_{k_\epsilon}\| \leq \|k - k_\epsilon\|_{XY} \leq \|k - k_1\|_{XY} + \|k - k_\epsilon\|_{XY} < \epsilon + (b-a)(d-c)\epsilon.$$

Παρατήρηση 4. Δεν είναι εν γένει αλήθεια ότι η $A_k f$ είναι συνεχής, ακόμα κι όταν η f είναι συνεχής.

Αν για παράδειγμα $k(x, y) = k_1(x)k_2(y)$, τότε $(A_k f)(x) = \int k_1(x)k_2(y)f(y)dy$ δηλαδή $A_k f = \langle f, \bar{k}_2 \rangle k_1$, οπότε η $A_k f$ είναι συνεχής αν και μόνον αν η k_1 είναι συνεχής (ή $\langle f, \bar{k}_2 \rangle = 0$).