Ορθοκανονικες Βασεις χωρων Hilbert

Υπενθυμιζουμε το

Λήμμα 1. *Εστω $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικη οικογενεια σ' έναν χώρο $(E, \langle .,. \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο.*
Τοτε, για καθε $f \in E$ εχουμε

$$(\alpha) \quad \|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

οπου $S_n(f) := \sum\limits_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$.

$$(\beta) \ (\text{Ανισοτητα Bessel}) \quad \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 2 (Χαρακτηρισμοι ορθοκανονικων βασεων).
Εστω H χωρος Hilbert *και $\mathcal{E} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$* ορθοκανονικο *υποσυνολο του H.*
Τα ακολουθα ειναι ισοδυναμα

1. $\overline{\operatorname{span} \mathcal{E}} = H$.
2. *Αν $f \in H$ και $f \perp \mathcal{E}$ τοτε $f = 0$.*
3. *Για καθε $f \in H$, αν $S_n(f) := \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k$ τοτε $\lim_N \|f - S_N(f)\|_H = 0$.*
4. *Για καθε $f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$ (ισοτητα Parseval).*

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Εστω οτι το $f \in H$ ειναι καθετο στο συνολο $\mathcal{E}$. Απο την υποθεση, υπαρχει ακολουθια $\{g_n\}$ στην span $\mathcal{E}$ ωστε $\|g_n - f\| \to 0$. Ομως, αφου $f \perp \mathcal{E}$, εχουμε $\langle f, g_n \rangle = 0$ για καθε n. Εχουμε λοιπον

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle f, f - g_n \rangle \leq \|f\| \, \|f - g_n\|$$

αρα $\|f\| \leq \|f - g_n\| \to 0$ οποτε $f = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Η ανισοτητα Bessel δειχνει οτι η σειρα $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2$ συγκλινει, αρα τα μερικα της αθροισματα αποτελουν βασικη ακολουθια. Ομως, αν $N > M$ εχουμε

$$\|S_N(f) - S_M(f)\|^2 = \left\| \sum_{M<k\leq N} \langle f, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \sum_{M<k\leq N} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\langle f, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{M} |\langle f, e_k \rangle|^2$$

(απο το Πυθαγορειο θεωρημα), αρα η ακολουθια $\{S_n(f)\}_N$ ειναι βασικη στον H.

Εφοσον ο H ειναι πληρης (!), υπαρχει $g \in H$ ωστε $\lim_N \|g - S_N(f)\|_H = 0$.

Θα δειξουμε οτι $g = f$, δηλαδη $\lim_N \|f - S_N(f)\|_H = 0$.

Απο την υποθεση, αρκει για αυτο να δειξουμε οτι το διανυσμα $g - f$ είναι καθετο στο συνολο $\mathcal{E}$, δηλαδη οτι $\langle g - f, e_m \rangle = 0$ για καθε m.

Πραγματι, αν $N \geq m$ εχουμε

$$\langle S_N(f), e_m \rangle = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle \langle e_k, e_m \rangle = \langle f, e_m \rangle$$

(τα $\{e_m\}$ ειναι ορθοκανονικα) αρα

$$\langle g, e_m \rangle = \lim_N \| \langle S_N(f), e_m \rangle = \langle f, e_m \rangle \, .$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Επεται αμεσα απο την ισοτητα

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f - S_N(f)\|^2$$

(Λημμα (1)).

(4) $\Rightarrow$ (1) Εστω $f \in H$. Αν $\lim_N \sum_{k=1}^{N} |\langle f, e_k \rangle|^2 = \|f\|^2$ τοτε παλι απο το Λημμα (1) εχουμε $\lim_N \|f - S_N(f)\|_H = 0$. Αλλα $S_N(f) \in \operatorname{span} \mathcal{E}$ επομενως $f \in \overline{\operatorname{span} \mathcal{E}}$. □

Παρατήρηση 3. *Αν μια οικογενεια $\{e_k\}$ απο μοναδιαια διανυσματα ικανοποιει την ταυτοτητα Parseval για καθε $f \in H$, τοτε η οικογενεια ειναι ορθοκανονικη.*

Πραγματι, εφαρμοζοντας την ταυτοτητα στο e_m, εχουμε

$$1 = \|e_m\|^2 = \sum_{k \neq m} |\langle e_m, e_k \rangle|^2 + \langle e_m, e_m \rangle^2 = \sum_{k \neq m} |\langle e_m, e_k \rangle|^2 + 1$$

οποτε $\langle e_m, e_k \rangle = 0$ για καθε $k \neq m$.