Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις I

Παράδοση: 2 Μαρτιου 2024

1. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι η απεικόνιση

$$E \times E \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής (ως προς καποια μετρικη γινομενο στον $E \times E$). Δειξτε οτι ο περιορισμός της σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $E \times E$ *είναι* ομοιόμορφα συνεχής.

2. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\langle x, y \rangle\rangle|^2 \leq \langle\langle x, x \rangle\rangle \langle\langle y, y \rangle\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

3. Εστω $\phi : C([a, b]) \to \mathbb{C}$ μια γραμμικη μορφη που ειναι *θετικη* δηλ. για καθε $f \in C([a, b])$ με $f \geq 0$ ισχυει $\phi(f) \in \mathbb{R}^+$. Δειξτε οτι η απεικονιση $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{C}$ οπου

$$\langle\langle f, g \rangle\rangle := \phi(\bar{g} f), \;\; f, g \in C([a, b])$$

ειναι ημι-εσωτερικο γινόμενο στον $C([a, b])$. Ποια ειναι η διασταση του χωρου πηλικο στις περιπτωσεις (α) $\phi(f) = f(a)$ (β) $\phi(f) = \int_a^b f$;

4. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2) $A^\perp = (\overline{\text{span}\, A})^\perp$.
3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

5. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι (η σειρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ συγκλινει και)

$\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ αν και μόνον αν $x \in \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

6. (α) Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\| \cdot \|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$.

(β) Εξετάστε αν η γραμμική μορφή $\psi : f \mapsto \int\limits_{1/2}^{1} f(t)dt$ είναι (i) $\| \cdot \|_2$-συνεχής και (ii) της μορφής $f \mapsto \langle f, g \rangle$ για κάποια $g \in C([0, 1])$.