Το $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Πράγματι, όλες οι ιδιότητες του ορισμού 1.1.1, εκτός από την (ii), είναι άμεσες συνέπειες της γραμμικότητας του ολοκληρώματος. Αποδεικνύουμε την (ii): Αν $\langle f, f \rangle = 0$ τότε $\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = 0$, οπότε, επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση $|f|^2$ είναι *μη αρνητική και συνεχής*, έπεται ότι $|f(t)|^2 = 0$ και συνεπώς $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$.

Πρόταση 1.1.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) *Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in E$ ισχύει*

$$|\langle x, y \rangle| \le \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2} .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη Αν $x, y \in E$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ εχουμε

$$0 \le \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \bar{\lambda} \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

Θέτοντας $\lambda = \mu \langle y, x \rangle$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$, η σχέση αυτή δίνει

$$0 \le \mu^2 |\langle x, y \rangle|^2 \langle x, x \rangle + 2\mu |\langle y, x \rangle|^2 + \langle y, y \rangle .$$

• Αν $\langle x, x \rangle = 0$, έχουμε $0 \le 2\mu |\langle y, x \rangle|^2 + \langle y, y \rangle$ για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, οπότε θα πρέπει $|\langle y, x \rangle|^2 = 0$, άρα $|\langle y, x \rangle|^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

• Αν $\langle x, x \rangle > 0$, τότε θέτοντας $\mu = -\langle x, x \rangle^{-1}$ έχουμε
$0 \le \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} - 2\frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} + \langle y, y \rangle$ άρα $\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle x, x \rangle} \le \langle y, y \rangle$, όπως θέλαμε.

Επίσης, ισότητα στην τελευταία ανισότητα, ισοδύναμα $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = |\langle x, y \rangle|^2$, ισχύει αν και μόνον αν $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = 0$, ισοδύναμα (από την (ii)) αν και μόνον αν $\lambda x + y = 0$ (με $\lambda = -\langle x, x \rangle^{-1} \langle y, x \rangle$). □

Παρατήρηση 1.1.3 *Στην απόδειξη της Πρότασης, η ιδιότητα (ii) του εσωτερικού γινομένου δεν χρησιμοποιήθηκε για να δειχθεί η ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αποδείχθηκε δηλαδή στην πραγματικότητα το εξής:*

> *Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου (Ορισμός 1.1.1) εκτός της (ii) (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο ή μια θετικά ημιορισμένη μορφή).*
>
> *Τότε $|\langle\langle x, y \rangle\rangle|^2 \le \langle\langle x, x \rangle\rangle . \langle\langle y, y \rangle\rangle \quad (x, y \in E)$.*

Αντίθετα, για τον χαρακτηρισμό της περίπτωσης ισότητας χρειάζεται και η ιδιότητα (ii).