Σχόλια στις Ασκήσεις IV

1. *Για τη διαγωνοποιηση του παραδειγματος που περιγραφεται στο* `opereta.pdf`, *δειτε τη νεα εκδοση του αρχειου αυτου στην η-ταξη.*

6. *(α) Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής. Δείξτε ότι το $A(\text{ball}\, H_1)$ είναι κλειστό υποσύνολο του H_2. (β) Δείξτε ότι αν ο $A(H_1)$ είναι κλειστός στον H_2 τότε ο A έχει πεπερασμένη τάξη.*

Λυση του (α) (Μια ιδεα του Κ. Θ.) Έστω $y \in \overline{A(\text{ball}\, H_1)}$. Υπαρχει λοιπον ακολουθια (x_n) στην ball H_1 ώστε $y = \lim Ax_n$. Να βρουμε $x \in \text{ball}\, H_1$ ωστε $y = Ax$.

Απο το φασματικο θεωρημα για τον θετικο συμπαγη τελεστη $|A|$ γραφουμε

$$|A| = \sum_k s_k v_k v_k^*$$

οπου $\{v_k\}$ ο.κ. βαση του $(\ker A)^\perp$ και (s_k) η (μηδενικη) ακολουθια των θετικων ιδιοτιμων του $|A|$. Απο την πολικη αναπαρασταση, ο A γραφεται $U|A|$ όπου U μερικη ισομετρια με αρχικο χωρο $(\ker A)^\perp$ και τελικο χώρο $\overline{A(H_1)}$. Συνεπως αν θεσουμε $w_k := Uv_k$, η ακολουθια $\{w_k\}$ είναι ορθοκανονικη βαση του χωρου $\overline{A(H_1)}$ και

$$A = \sum_k s_k w_k v_k^*.$$

Για καθε $x \in H_1$ και καθε $k \in \mathbb{N}$ εχουμε

$$\langle Ax, w_k \rangle = s_k \langle x, v_k \rangle.$$

Συνεπως, αφου $s_k \neq 0$ για καθε k και $\langle x_n, v_k \rangle = \frac{1}{s_k}\langle Ax_n, w_k \rangle$, η ακολουθια $(\langle x_n, v_k \rangle)_n$ συγκλινει (!) και, θετοντας $r_k = \lim_n \langle x_n, v_k \rangle$, εχουμε

$$s_k r_k = \lim_n s_k \langle x_n, v_k \rangle = \lim_n \langle Ax_n, w_k \rangle = \langle y, w_k \rangle\,. \tag{*}$$

Επειδη η (v_k) ειναι ορθοκανονικη, απο την ανισοτητα Bessel εχουμε για καθε $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{K} |\langle x_n, v_k \rangle|^2 \leq \|x_n\|^2 \leq 1$$

αρα $\sum\limits_{k=1}^{K} |r_k|^2 \leq 1$ για καθε K και συνεπως

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_k|^2 \leq 1\,.$$

Επομενως η σειρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k v_k$$

συγκλινει και ορίζει $x \in \text{ball}\, H_1$. Απο την (*) εχουμε

$$\langle Ax, w_k \rangle = s_k \langle x, v_k \rangle = s_k r_k = \langle y, w_k \rangle$$

για καθε k, απο το οποιο επεται οτι $Ax = y$, γιατι η $\{w_k\}$ είναι ορθοκανονικη βαση του χωρου $\overline{A(H_1)}$.

Λυση του (β) [Κ.Θ.] Αφου $H_1 = \bigcup_n n(\text{ball}\, H_1)$ εχουμε $A(H_1) = \bigcup_n nA(\text{ball}\, H_1)$ και συνεπως

$$\overline{A(H_1)} = \bigcup_n \overline{nA(\text{ball}\, H_1)}$$

που ειναι μια αριθμησιμη ενωση απο κλειστα συνολα. Αν ο $\overline{A(H_1)}$ ειναι κλειστος τοτε ειναι πληρης μετρικος χωρος, συνεπως απο το Θεωρημα Baire καποιο $\overline{nA(\text{ball}\, H_1)}$ θα εχει μη κενο εσωτερικο, οποτε και το $\overline{A(\text{ball}\, H_1)}$ θα εχει μη κενο εσωτερικο (η $y \mapsto ny$ ειναι ομοιομορφισμος). [1] Θα περιεχει λοιπον μια ανοικτη μπαλλα $B(y, 2r)$, αρα και την $B(0, 2r)$ (η $\xi \mapsto \xi - y$ ειναι ομοιομορφισμος). Τελικα το $\overline{A(\text{ball}\, H_1)}$ θα περιεχει την $B(0, 2r)$, άρα και την $\overline{B(0, r)}$, οποτε η τελευταια θα ειναι συμπαγης, αφου ο A ειναι συμπαγης. Μα αυτο μπορει να συμβει (οπως ειναι γνωστο) [2] μονον αν ο χωρος $\overline{A(H_1)}$ εχει πεπερασμενη διασταση, δηλ. μονον αν ο A εχει πεπερασμενη ταξη.

Το αντιστροφο ειναι βεβαια προφανες: αν ο A εχει πεπερασμενη ταξη, τοτε ο $A(H_1)$ εχει πεπερασμενη διασταση, αρα ειναι πληρης και συνεπως κλειστος στον H_2.

8. *Θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T = \left[\begin{smallmatrix} P & A \\ A^* & Q \end{smallmatrix}\right]$ όπου $A, P, Q \in \mathcal{B}(H)$ και οι P και Q είναι θετικοί. Δείξτε ότι ο T είναι θετικός αν-ν $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Px, x\rangle.\langle Qy, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Αν $P = Q$ και ο T είναι θετικός, δείξτε ότι $A^*A \leq \|P\|\, P$ και άρα $\|A\| \leq \|P\|$.*

Λυση (Συμφωνα με τον Αλ. Κ.) Υποθετουμε οτι ο T ειναι θετικος. Εχουμε τοτε, για καθε $x, y \in H$, απο την ανισοτητα Cauchy-Schwarz για την θετικα ημιορισμενη μορφη $(\xi, \eta) \mapsto \langle T\xi, \eta\rangle$,

$$|\langle T \left[\begin{smallmatrix} y \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}\right]\rangle|^2 \leq \langle T \left[\begin{smallmatrix} y \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} y \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\rangle \cdot \langle T \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}\right]\rangle$$

ισοδυναμα

$$|\langle A^*y, x\rangle|^2 \leq \langle Py, y\rangle\langle Qx, x\rangle$$

που ειναι η ζητουμενη ανισοτητα (αφου $|\langle A^*y, x\rangle| = |\langle Ax, y\rangle|$).

Υποθετουμε αντιστροφα οτι ισχυει η ανισοτητα για καθε $x, y \in H$. Εχουμε τοτε

$$\langle Px, x\rangle + \langle Qy, y\rangle \geq 2\sqrt{\langle Px, x\rangle\langle Qy, y\rangle}$$

απο την ανισοτητα Αριθμητικου-Γεωμετρικου Μεσου και

$$\sqrt{\langle Px, x\rangle\langle Qy, y\rangle} \geq |\langle Ax, y\rangle|$$

απο την υποθεση. Συνεπως

$$\langle T \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\rangle = \langle Px, x\rangle + \langle Qy, y\rangle + 2\text{Re}\langle Ay, x\rangle \geq 2|\langle Ax, y\rangle| + 2\text{Re}\langle Ay, x\rangle \geq 0\,.$$

αφου $\text{Re}\langle Ay, x\rangle \geq -|\langle Ax, y\rangle|$. Δειξαμε λοιπον οτι ο T ειναι θετικος.

Για το δευτερο σκελος, απο την ανισοτητα $|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle Px, x\rangle.\langle Qy, y\rangle$ για $P = Q$ και $y = Ax$ εχουμε

$$\|Ax\|^4 = \langle Ax, Ax\rangle^2 \leq \langle Px, x\rangle.\langle PAx, Ax\rangle \leq \langle Px, x\rangle.\, \|PAx\|\, \|Ax\| \leq \langle Px, x\rangle.\, \|P\|\, \|Ax\|^2$$

αρα

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle^2 \leq \langle Px, x\rangle.\, \|P\|$$

δηλαδη

$$\langle A^*Ax, x\rangle \leq \langle \|P\|\, Px, x\rangle$$

για καθε x, οπως θελαμε.

[1] Σκοπιμα δεν χρησιμοποιουμε οτι το $A(\text{ball}\, H_1)$ ειναι κλειστο, για να φανει οτι η ιδια αποδειξη δουλευει κι οταν οι H_1 και H_2 ειναι μονο χωροι Banach.

[2] Γρηγορη αποδειξη για χωρους Hilbert: αν ο $\overline{A(H_1)}$ εχει απειρη διασταση, περιεχει μια απειρη ορθοκανονικη ακολουθια $\{f_n\}$. Τοτε ομως η $\{rf_n\}$ περιεχεται στην $\overline{B(0, r)}$, αλλα δεν εχει συγκλινουσα υπακολουθια, ειπε ο Πυθαγορας.