Ο Συναρτησιακός Λογισμός (Functional Calculus)

1. Εισαγωγή Ο στόχος είναι, αν $A \in \mathcal{B}(H)$, να ορίσουμε τελεστές $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ για κατάλληλες συναρτήσεις f.

Δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό είναι οι ακόλουθες:

(α) Αν η f είναι μιγαδικό *πολυώνυμο*, της μορφής $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, θέτουμε

$$f(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

(όπου $A^0 = I$). Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f \to f(A)$ διατηρεί άθροισμα και γινόμενο.

(β) Αν ο A είναι *αυτοσυζυγής* (ή γενικότερα φυσιολογικός) τελεστής και ο χώρος H έχει *πεπερασμένη διάσταση*, τότε ο A διαγωνοποιείται, δηλαδή

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

όπου P_λ είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_λ του A: οι προβολές $\{P_\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και έχουν άθροισμα $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I_H$. Τότε, *για κάθε συνάρτηση* $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ μπορούμε να ορίσουμε

$$A_f := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda \,.$$

Ισοδύναμα, αν διαγωνοποιήσουμε τον A ως προς μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του A, τότε ο A θα έχει διαγώνιο πίνακα

$$A \sim \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,,$$

ο τελεστής A_f είναι αυτός που έχει πίνακα ως προς την ίδια ορθοκανονική βάση τον

$$A_f \sim \text{diag}(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))\,.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση (α) ο τελεστής (και ο χώρος) είναι αυθαίρετος ενώ η f περιορίζεται στα πολυώνυμα, ενώ αντίθετα στην περίπτωση (β) η f είναι αυθαίρετη ενώ ο A περιορίζεται στους φυσιολογικούς τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Οι δύο αυτές διαδικασίες, παρότι ξεκινούν από διαφορετικές προσεγγίσεις, *στην ειδική περίπτωση που ο A είναι φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και η f είναι πολυώνυμο*, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$f(A) = A_f$$

Πράγματι, έχουμε

$$A^2 = A\left(\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda A P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 P_\lambda$$

και επαγωγικά $A^m = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda_n^m P_\lambda$. Λόγω γραμμικότητας, έπεται ότι αν $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_n\lambda^n$, τότε $A_f = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda = f(A)$.

2. Παρατηρήσεις για το φάσμα Θεωρούμε δυο χώρους Banach E και F και μια (μη μηδενική) γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$. Αν η T είναι φραγμένη με φραγμένο αντίστροφο, τότε η εικόνα $\text{im}(T)$ είναι ίση με F, ειδικότερα είναι πυκνή στον F και υπάρχουν θετικοί αριθμοί m, M ώστε

$$m\|x\| \le \|Tx\| \le M\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in E. \qquad (*)$$

Μπορούμε να πάρουμε $M = \|T\|$ και $m = 1/\|T^{-1}\|$, αφού $\|x\| = \|T^{-1}(Tx)\| \le \|T^{-1}\|\|Tx\|$.

Αντίστροφα, αν η T έχει πυκνή εικόνα και ικανοποιεί τις ανισότητες (*), τότε βεβαίως είναι 1-1, όμως είναι και επί, γιατί το σύνολο τιμών της είναι κλειστό:

Πράγματι, αν $Tx_n \to y$ τότε η ανισότητα $m\|x_i - x_j\| \le \|Tx_i - Tx_j\|$ δείχνει ότι η ακολουθία (x_n) είναι Cauchy στον E, οπότε (πληρότητα!) συγκλίνει σε κάποιο x, και τότε, αφού ο T είναι φραγμένος (από το M), έχουμε $y = \lim Tx_n = T(\lim x_n) = Tx$.

Δηλαδή η απεικόνιση $T^{-1} : Tx \mapsto x : F \to E$ είναι καλά ορισμένη και γραμμική, και η ανισότητα $m\|T^{-1}(Tx)\| \le \|Tx\|$ δείχνει ότι είναι φραγμένη (από $1/m$).

Συμπέρασμα *Ένας φραγμένος τελεστής $T : E \to F$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν έχει πυκνή εικόνα και υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \ge m\|x\|$ για κάθε $x \in E$ (λέμε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του E»).*

Υποθέτουμε τώρα τώρα ότι ο $E = F$ είναι χώρος Hilbert H και ο $T \in \mathcal{B}(H)$ *φυσιολογικός* τελεστής. Αν ο T ικανοποιεί την ανισότητα $m\|x\| \le \|Tx\|$ για κάθε $x \in H$, τότε και ο συζυγής του την ικανοποιεί, γιατί $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$. Έπεται ότι $\ker T^* = \{0\}$ και άρα $\text{im}(T)^\perp = \{0\}$. Επομένως το $\text{im}(T)$ είναι πυκνό, και καθώς είναι κλειστό, είναι ίσο με H. Δηλαδή ο $T : H \to H$ είναι 1-1 και επί, και ο αντίστροφός του είναι γραμμικός τελεστής και φραγμένος από $1/m$.

Συμπέρασμα *Ένας φραγμένος φυσιολογικός τελεστής $T : H \to H$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του H, δηλαδή αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \ge m\|x\|$ για κάθε $x \in H$.*

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν φυσιολογικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ και έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$ και ας εφαρμόσουμε τα προηγούμενα στον φυσιολογικό τελεστή $T := A - \lambda I$. Έχουμε τότε ότι:
$\lambda \notin \sigma(A)$, δηλ. ο T είναι αντιστρέψιμος , αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Ax - \lambda x\| \ge m$ για κάθε x στη μοναδιαία σφαίρα του H.

Ισοδύναμα:

Πρόταση 1 *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, ένας $\lambda \in \mathbb{C}$ ανήκει στο φάσμα $\sigma(A)$ του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στη μοναδιαία σφαίρα του H ώστε $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$.*

Παρατήρηση Το λ είναι ιδιοτιμή του A αν και μόνον αν μπορούμε να διαλέξουμε για (x_n) την σταθερή ακολουθία $x_n = x$ για κάθε n (οπότε το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A). Γιαυτό λέμε ότι τα στοιχεία του φάσματος ενός φυσιολογικού τελεστή είναι «προσεγγιστικές ιδιοτιμές».

Το επόμενο πόρισμα είναι προφανές για ιδιοτιμές. Δείχνουμε ότι ισχύει και για προσεγγιστικές ιδιοτιμές.

Πόρισμα 2 *Το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς.*

Το φάσμα ενός θετικού τελεστή αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς.

Απόδειξη. Έστω $A = A^*$ και $\lambda \in \sigma(A)$. Υπάρχει ακολουθία (x_n) από μοναδιαία διανύσματα ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται ότι $|\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \to 0$ δηλαδή

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| \to 0\,.$$

Όμως $\langle Ax_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε n, άρα $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον $A \ge 0$, τότε $\langle Ax_n, x_n\rangle \ge 0$ για κάθε n, άρα $\lambda \ge 0$. □

3. Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές Στα επόμενα, σταθεροποιούμε έναν *αυτοσυζυγή* τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ (όπου ο H είναι χώρος Hilbert αυθαίρετης διάστασης), και έχουμε στόχο να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για κλάσεις συναρτήσεων f ευρύτερες από τα πολυώνυμα.

Πώς συμπεριφέρεται το φάσμα $\sigma(A)$ όταν εφαρμόζεται στον A ένα πολυώνυμο p;
Στην περίπτωση φυσιολογικού τελεστή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, οπότε $A \sim \mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, εφόσον $p(A) = A_p \sim \mathrm{diag}(p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n))$, βλέπουμε ότι το $\sigma(p(A))$ (δηλαδή εδώ το σύνολο των ιδιοτιμών του $p(A)$), είναι το $\{p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)\} = p(\sigma(A))$. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει πολύ γενικότερα:

Πρόταση 3 *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, ο $p(A)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή, οπότε το συμπέρασμα αληθεύει. Υποθέτω λοιπόν ότι το p δεν είναι σταθερό.

Αν $\mu \in \mathbb{C}$, το πολυώνυμο $q(z) := p(z) - \mu$ παραγοντοποιείται:
$q(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \ldots (z - \lambda_n)$ (όπου $c \neq 0$). Τότε

$$p(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_n I).$$

Αν κάθε $A - \lambda_k I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε βέβαια το γινόμενό τους, άρα και το $p(A) - \mu I$, είναι αντιστρέψιμο. Αντίστροφα αν το $q(A) = p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο, επειδή οι $A - \lambda_k I$ μετατίθενται, θα είναι όλοι αντιστρέψιμοι.[1] Δηλαδή

$$\mu \notin \sigma(p(A)) \iff p(A) - \mu I \text{ αντιστρέψιμος} \iff \text{κάθε } A - \lambda_k I \text{ αντιστρέψιμος} \iff \text{κάθε } \lambda_k \notin \sigma(A).$$

Επομένως $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\lambda_k \in \sigma(A)$ για κάποιο $k = 1, \ldots, n$. Αλλά τα λ_k είναι οι ρίζες του q, δηλαδή είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ που ικανοποιούν $p(\lambda) = \mu$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το κρίσιμο βήμα για να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα σε συναρτήσεις που είναι κατάλληλα όρια πολυωνύμων. Ας σημειώσουμε μόνο ότι το Θεώρημα 5 (σε αντίθεση με την προηγούμενη Πρόταση) δεν ισχύει για μη φυσιολογικούς τελεστές. Αν για παράδειγμα $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $p(t) = t^2$, τότε $\sigma(A) = \{0, 1\}$ οπότε $\|p\|_{\sigma(A)} = 1$ ενώ $\|p(A)\| > 2$ γιατί π.χ. $\|p(A) \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\| = \sqrt{5}$.

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε αποδείξει την ακόλουθη

Πρόταση 4 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε*

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα 5 *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $A = A^*$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Απόδειξη Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το p έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο τελεστής $p(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα από την Πρόταση 4 έχουμε

$$\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\}.$$

[1] Το $q(A)$ μπορεί να γραφεί $q(A) = (A - \lambda_k I)B_k = B_k(A - \lambda_k I)$ για κατάλληλο B_k. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(A))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι ο $A - \lambda_k I$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμος.

Αλλά $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ από την Πρόταση 3, και η ζητούμενη ισότητα έπεται.

Για την γενική περίπτωση, παρατήρησε ότι αν $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$p(A)^* p(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* \left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k A^k\right)\left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) := q(A)$$

(εφόσον $A = A^*$) όπου q είναι το πολυώνυμο $q(t) = \bar{p}(t)p(t)$ που έχει πραγματικούς συντελεστές (εξηγείστε γιατί). Από την προηγούμενη παράγραφο λοιπόν έχουμε

$$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Όμως $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$ από την ιδιότητα C* και επομένως

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\bar{p}(\lambda)p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2.\end{aligned}$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις.

Έχουμε δείξει (Πόρισμα 2 και Πρόταση 4) ότι $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$. Ας θυμηθούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ προσεγγίζεται, ομοιόμορφα στο συμπαγές $\sigma(A)$, από πολυώνυμα. Αυτό έπεται από το Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσει κανείς ότι η f επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση ορισμένη σ' ολόκληρο στο διάστημα $[-\|A\|, \|A\|]$.

Θεώρημα 6 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))
*Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A. Επίσης ισχύει $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(A)$, τότε $p(A) = q(A)$ (πράγματι, $\|p(A) - q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$). Επομένως το $p(A)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(A)$. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{P}(\sigma(A))$ τον χώρο των *πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $\sigma(A)$, η απεικόνιση

$$\Phi_o : \ (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|) : \ \ p \to p(A)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι η Φ_o διατηρεί άθροισμα και γινόμενο:

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) \quad \text{και} \quad (pq)(A) = p(A)q(A)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$(p(A))^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k A^k = \overline{p}(A)$$

(αφού $A = A^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι $\|\Phi_o(p)\| = \|p(A)\| = \|p\|_{\sigma(A)}$ για κάθε πολυώνυμο p, δηλαδή ότι η απεικόνιση Φ_o είναι ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον ο $\mathcal{P}(\sigma(A))$ είναι πυκνός υπόχωρος του $C(\sigma(A))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Επειδή οι γραμμικές πράξεις, καθώς και η ενέλιξη, είναι (νορμ-) συνεχείς στην $C(\sigma(A))$ και στον $\mathcal{B}(H)$, η επέκταση Φ_c της Φ_o διατηρεί και αυτή το άθροισμα, το γινόμενο και την ενέλιξη, είναι δηλαδή *-μορφισμός. [2]

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ταυτίζεται με τον Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. $\square$

Ορισμός 1 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. **Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus)** είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.*

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0.$$

4. Εφαρμογές

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Είναι φανερό ότι, για κάθε πολυώνυμο p, ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A. Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, που είναι όριο πολυωνύμων του A αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι το γεγονός ότι *ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A*. Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 7 *Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον $f(A)$.*

Πρόταση 8 (Φασματικής Απεικόνισης) *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και $f \in C(\sigma(A))$, τότε*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι ένας $\mu \in \mathbb{C}$ ανήκει στο $\sigma(f(A))$ αν και μόνον αν $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ισοδύναμα να δείξουμε ότι

Ο τελεστής $f(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμος $\iff$ $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Θέτοντας $g(t) - f(t) - \mu I$, να δείξουμε ότι

Ο τελεστής $g(A)$ είναι αντιστρέψιμος $\iff$ $g(\lambda) \neq 0 \;\; \forall \lambda \in \sigma(A)\}$.

($\Leftarrow$) Αν η g δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, η συνάρτηση $h(t) := \frac{1}{g(t)}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(A)$. Επειδή $hg = gh = \mathbf{1}$, από τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε $h(A)g(A) = \Phi_c(h)\Phi_c(g) = \Phi_c(hg) = \Phi_c(\mathbf{1}) = I$ και ομοίως $g(A)h(A) = \Phi_c(gh) = \Phi_c(\mathbf{1}) = I$. Άρα ο $g(A)$ είναι αντιστρέψιμος (με αντίστροφο τον $h(A)$).

---

[2] Ας δείξουμε για παράδειγμα ότι $\Phi_c(fg) = \Phi_c(f)\Phi_c(g)$, δηλαδή ότι $(fg)(A) = f(A)g(A)$ όταν $f, g \in C(\sigma(A))$. Υπάρχουν ακολουθίες πολυωνύμων $(p_n), (q_n)$ ώστε $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$ και $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$, οπότε $\|p_nq_n - fg\|_{\sigma(A)} \to 0$. Εφόσον η Φ_c είναι γραμμική ισομετρία, έπεται ότι

$$\|p_n(A) - f(A)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\Phi_c(p_n - f)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$$

και ομοίως $\|q_n(A) - g(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \to 0$ και $\|(p_nq_n)(A) - (fg)(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \to 0$. Αλλά $(p_nq_n)(A) = p_n(A)q_n(A)$ για κάθε n και συνεπώς

$$(fg)(A) = \lim_n (p_nq_n)(A) = \lim_n p_n(A)q_n(A) = \lim_n p_n(A) \lim_n q_n(A) = f(A)g(A)\,.$$

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 \in \sigma(A)$ με $g(\lambda_0) = 0$ και θα δείξουμε ότι ο $g(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θεωρούμε μια ακολουθία πολυωνύμων (p_n) που συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$. Αν θέσουμε $q_n := p_n - p_n(\lambda_0)\mathbf{1}$ έχουμε

$$\|q_n - g\|_{\sigma(A)} = \|p_n - g - p_n(\lambda_0)\mathbf{1}\|_{\sigma(A)} \leq \|p_n - g\|_{\sigma(A)} + |p_n(\lambda_0)| \to 0 + |g(\lambda_0)| = 0\,,$$

επίσης όμως $q_n(\lambda_0) = 0$ για κάθε n.

Υπάρχει λοιπόν μια ακολουθία πολυωνύμων (q_n) που συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$ και επιπλέον ικανοποιεί $q_n(\lambda_0) = 0$ για κάθε n.

Έπεται λοιπόν ότι $\|q_n(A) - g(A)\| = \|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$. Αν ο $g(A)$ ήταν αντιστρέψιμος, θα είχαμε

$$\left\|g(A)^{-1}q_n(A) - I\right\| = \left\|g(A)^{-1}(q_n(A) - g(A))\right\| \leq \left\|g(A)^{-1}\right\| \|q_n(A) - g(A)\| \to 0\,.$$

Θα υπήρχε λοιπόν $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\left\|g(A)^{-1}q_n(A) - I\right\| < 1$. Αυτό σημαίνει, όπως έχουμε δείξει, ότι ο $g(A)^{-1}q_n(A)$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε και ο $q_n(A)$ θα ήταν αντιστρέψιμος. Όμως από την Πρόταση 3 έχουμε $\sigma(q_n(A)) = q_n(\sigma(A))$ το οποίο περιέχει το 0 επειδή $q_n(\lambda_0) = 0$. Δεν μπορεί λοιπόν ο $q_n(A)$ να είναι αντιστρέψιμος. $\square$

Πόρισμα 9 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής.*

- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι πάντα φυσιολογικός.*
- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Αν $f = \lim_n p_n$ όπου p_n πολυώνυμα, επειδή κάθε $p_n(A)$ είναι φυσιολογικός τελεστής (γραμμικός συνδυασμός αυτοσυζυγών), έπεται ότι ο $f(A)$ είναι φυσιολογικός.

Αν τώρα η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(A)$, τότε $\lim_n \bar{p}_n = \bar{f} = f$ και συνεπώς $f = \lim_n q_n$ όπου $q_n = \frac{1}{2}(p_n + \bar{p}_n)$ είναι πραγματικό πολυώνυμο, οπότε ο $q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα και ο $f(A) = \lim_n q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής.

Αντίστροφα αν ο $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής, από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι
$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A) \subseteq \mathbb{R}$. $\square$

Πρόταση 10 *Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικός αν και μόνον αν $A = A^*$ και $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Αν ο A είναι θετικός, τότε ο A είναι αυτοσυζυγής. Έχουμε ήδη δείξει (Πόρισμα 2) ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

($\Leftarrow$) Αν $A = A^*$, εφαρμόζεται στον A ο συναρτησιακός λογισμός. Αν επίσης $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B^2 = A$. Αφού η f παίρνει πραγματικές τιμές, από το Πόρισμα 9 ο B είναι αυτοσυζυγής.

Κατά συνέπεια ο $A = B^2 = B^*B$ είναι θετικός. $\square$

Παρατήρηση 11 *Μπορεί τώρα να προστεθεί στο Πόρισμα 9 και το ακόλουθο:*
Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής,

- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι θετικός αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Πρόταση 12 (Τετραγωνική ρίζα) *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο A είναι θετικός.*

2. *Υπάρχει θετικός $B \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $B^2 = A$.*

3. *Υπάρχει $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^*X = A$.*

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$ (2) Αν ο A είναι θετικός, δείξαμε προηγουμένως ότι ο τελεστής $B = f(A)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ είναι αυτοσυζυγής και ικανοποιεί $B^2 = A$. Αφού η $f(t) = \sqrt{t}$ παίρνει μη αρνητικές τιμές στο $\sigma(A)$, από την Πρόταση 8 έχουμε ότι $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}_+$, οπότε ο $B = f(A)$ είναι θετικός.

(2) $\Rightarrow$ (3) Προφανές: πάρε $X = B$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Αν $A = X^*X$ τότε για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\langle Ax, x\rangle = \langle X^*Xx, x\rangle = \langle Xx, Xx\rangle \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός. □

Σχόλια (α) Αποδεικνύεται[3] ότι η θετική τετραγωνική ρίζα $f(A)$ ενός θετικού τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι μοναδική. Γράφουμε $f(A) = A^{1/2}$.

(β) Τονίζουμε ότι η υπόθεση $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ δεν εξασφαλίζει ότι ο A είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Πόρισμα 13 *Κάθε* αυτοσυζυγής *$A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών $A = A_+ - A_-$ με $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Έχουμε μάλιστα $|A| = A_+ + A_-$.*

Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.

Απόδειξη Θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ ($t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$). Από την Πρόταση 10 οι τελεστές αυτοί είναι θετικοί, αφού οι $f_\pm$ παίρνουν θετικές τιμές. Οι σχέσεις $A = A_+ - A_-$ και $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ προκύπτουν από τον συναρτησιακό λογισμό, αφού $(f_+).(f_-) = 0$. Τέλος, η σχέση $|A| = A_+ + A_-$ προκύπτει από την

$$|A|^2 = A^*A = (A_+ - A_-)^2 = A_+^2 + A_-^2 = (A_+ + A_-)^2$$

(αφού $A_+A_- = A_-A_+ = 0$) και τη μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας. □

Πρόταση 14 *Έστω $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A, όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$.*

Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } \ x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.
Όταν η f είναι συνεχής, τότε $f(A) = A_f$.

Παρατήρηση: Ο τελεστής A_f δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα, $A_{\mathrm{id}} = I_H$). Όταν όμως η ακολουθία $(f(\lambda_n))$ είναι μηδενική, τότε ο A_f είναι συμπαγής ($\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης).

Η Απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

[3] μια απόδειξη υπάρχει στο (ii) στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.12 στο “Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών”.