Μια παρατηρηση για τη διαγωνοποιηση

Έστω $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ μιγαδικος χωρος Hilbert οπου καθε H_n είναι υποχωρος με $\dim H_n = n$. Για καθε n εστω $V_n \in \mathcal{B}(H)$ μια μερικη ισομετρια με αρχικο και τελικο χωρο H_n. Έστω (a_n) μια φραγμενη ακολουθια διαφορετικων ανα δυο θετικων αριθμων. Οριζουμε $V \in \mathcal{B}(H)$ απο τη σχεση $Vx := \sum_{n=1}^{\infty} a_n V_n x$ για καθε $x \in H$ (η σειρα αυτη συγκλινει ως προς τη νορμα του H και οριζει φραγμενο τελεστη- ασκηση). Για παραδειγμα

$$a_1 1 \oplus a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \dots$$

Δηλαδη

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \end{bmatrix} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_4 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 \end{bmatrix} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Αν επιλεξουμε ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ο.κ. βαση $B_n := \{e_k^n : k \in [n]\}$ του H_n τοτε η $\cup_n B_n$ ειναι ο.κ. βαση του H που διαγωνοποιει τον V^*V (επομενως και τον $|V|$) αλλα εν γενει ΔΕΝ διαγωνοποιει τον V (δες πχ. το παραδειγμα). Παρολα αυτα ο V ειναι διαγωνοποιησιμος. Αποδειξε το.

Στην περιπτωση του παραδειγματος, βρες μια ο.κ. βαση του H απο ιδιοδιανυσματα του τελεστη (υποδειξη: μπορει να χρειασθουν n-οστες ριζες της μοναδας).

Παρατηρησε οτι ο V δεν ειναι συμπαγης ανν η (a_n) δεν ειναι μηδενικη ακολουθια.

Να διαγωνοποιησουμε τον V_N

Θεωρουμε τη συνηθισμενη ΟΚ βαση $\{e_j : j = 1, \ldots, N\}$ του $\ell^2[N]$ και την ισομετρια

$$V_N : \ell^2[N] \to \ell^2[N] : e_1 \mapsto e_2 \mapsto \cdots \mapsto e_{N-1} \mapsto e_1.$$

Ως προς την βαση αυτη, ο V_N εχει πινακα

$$V_N \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οριζουμε την απεικονιση [1]

$$\mathcal{F} : e_j \mapsto f_j := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \omega^{-jk} e_k, \quad j = 1, \ldots, N$$

οπου $\omega := \exp(\frac{2\pi i}{N})$, και επεκτεινουμε γραμμικα σε $\mathcal{F} : \ell^2[N] \to \ell^2[N]$.

Η απεικονιση $\mathcal{F}$ είναι ισομετρια, αρα διατηρει τη νορμα του ℓ^2. Για να το δειξουμε, αρκει να ελεγξουμε οτι η οικογενεια $\{f_j\}$ is είναι ορθοκανονικη (οποτε θα ειναι ΟΚ βαση του $\ell^2[N]$).

Πραγματι, εχουμε

$$\langle f_j, f_{j'} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k,k'=1}^{N} \langle \omega^{-jk} e_k, \omega^{-j'k'} e_{k'} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \omega^{-jk} \omega^{j'k}$$

το οποιο ισουται με 1 αν $j = j'$ και αν $j \neq j'$, τοτε, γραφοντας προσωρινα ω_1 αντι για το $\omega^{j'-j}$ εχουμε

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \omega^{-jk} \omega^{j'k} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \omega_1^k = 0$$

γιατι $\omega_1 \neq 1$ και

$$(1 - \omega_1) \sum_{k=1}^{N} \omega_1^k = \omega_1 - \omega_1^{N+1} = 0$$

αφου η ω_1 είναι μια N-οστη ριζα της μοναδας.

Τα $\{f_j\}$ ειναι ιδιοδιανυσματα του τελεστη V_N!
Πραγματι,

$$\begin{aligned} V_N f_j &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} \omega^{-jk} V_N e_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \omega^{-jk} e_{k+1} + \omega^{-jN} e_1 \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \omega^{-jk} e_{k+1} + e_1 \right) \\ &= \omega^j \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \omega^{-j(k+1)} e_{k+1} + \omega^{-j} e_1 \right) = \omega^j \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{m=2}^{N} \omega^{-jm} e_m + \omega^{-j} e_1 \right) \\ &= \omega^j f_j \,. \end{aligned}$$

Επομενως, ως προς την ΟΚ βαση $\{f_j\}$, ο τελεστης εχει διαγωνιο πινακα:

$$V_n \simeq \begin{bmatrix} \omega & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \omega^3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & 1 \end{bmatrix}$$

[1] Προκειται για τον μετασχηματισμο Fourier απ τον L^2 της ομαδας $\mathbb{Z}_N$ στον L^2 της δυικης ομαδας, η οποια αποτελειται απ τους χαρακτηρες $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{N-1}\}$.