Ιδιοτιμές ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή

Ορίζουμε

$$(Af)(t) = tf(t), \qquad f \in C([0,1])\,.$$

Ξέρουμε ότι ο A επεκτείνεται μοναδικά σε φραγμένο τελεστή που τον συμβολίζουμε πάλι $A : L^2([0,1] \to L^2([0,1])$.

Πρόταση 0.1 *Ο τελεστής A δεν έχει καμμιά ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι κανένας $\lambda \in \mathbb{C}$ δεν μπορεί να είναι ιδιοτιμή του A:

• Αν $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,1]$, τα πράγματα είναι εύκολα: Ο $A - \lambda I$ έχει φραγμένο αντίστροφο.

Πράγματι, η συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{t-\lambda}$ ορίζεται στο $[0,1]$ και είναι συνεχής άρα φραγμένη, επομένως ορίζει φραγμένο τελεστή $M_g \in \mathcal{B}(L^2([0,1])$ που ικανοποιεί, αν $f \in C([0,1])$

$$(((A-\lambda I)M_g)f(t) = (t-\lambda)g(t)f(t) = f(t) \;\text{ και }\; (M_g((A-\lambda I))f(t) = g(t)(t-\lambda)f(t) = f(t)$$

για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή $(A-\lambda I)M_g f = f = M_g(A-\lambda I)f$, άρα

$$(A-\lambda I)M_g = I = M_g(A-\lambda I)\,.$$

• Αν $\lambda \in [0,1]$, θέλω να δείξω ότι ο $A - \lambda I$ είναι 1-1. Έστω λοιπόν $f \in L^2([0,1])$ με $Af - \lambda f = 0$, να δείξουμε ότι το f είναι το μηδενικό στοιχείο[1] του $L^2([0,1])$.

Ισοδύναμα, να δείξουμε ότι το f είναι κάθετο σε κάθε $h \in L^2([0,1])$. Αρκεί για αυτό να δείξουμε ότι το f είναι κάθετο σε κάθε χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi = \chi_{[a,b]}$ κάθε $[a,b] \subseteq [0,1]$ (δες σχόλιο μετά την απόδειξη).

Έστω λοιπόν $[a,b] \subseteq [0,1]$.
• Αν $\lambda \notin [a,b]$, θεωρώ τη συνάρτηση $\phi(t) = \frac{1}{t-\lambda}\chi_{[a,b]}(t)$. Η ϕ ανήκει στον $L^2([0,1])$ (δες πάλι σχόλιο μετά την απόδειξη) και ικανοποιεί $(t-\lambda)\phi(t) = \chi_{[a,b]}(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή $(A-\lambda I)\phi = \chi_{[a,b]}$. Έχουμε λοιπόν

$$\langle f, \chi_{[a,b]}\rangle = \langle f, (A-\lambda I)\phi\rangle = \langle (A-\lambda I)^* f, \phi\rangle = \langle (A-\lambda I)f, \phi\rangle = 0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(A-\lambda I)^* = A - \lambda I$ γιατί $A = A^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

• Αν $\lambda \in [a,b]$, για κάθε $\epsilon > 0$ γράφω $\chi_\epsilon^- = \chi_{[a,\lambda-\epsilon]}$ και $\chi_\epsilon^+ = \chi_{[\lambda+\epsilon,b]}$. Από τα προηγούμενα, αφού $\lambda \notin [a, \lambda-\epsilon]$ και $\lambda \notin [\lambda+\epsilon, b]$, έχουμε $\langle f, \chi_\epsilon^-\rangle = 0$ και $\langle f, \chi_\epsilon^+\rangle = 0$, άρα $\langle f, \chi_\epsilon^- + \chi_\epsilon^+\rangle = 0$.

Όμως $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \left\|(\chi_\epsilon^- + \chi_\epsilon^+) - \chi_{[a,b]}\right\|_2 = 0$ γιατί

$$\left\|(\chi_\epsilon^- + \chi_\epsilon^+) - \chi_{[a,b]}\right\|_2^2 = \int_0^1 |(\chi_\epsilon^- + \chi_\epsilon^+) - \chi_{[a,b]}|^2 = \int_{\lambda-\epsilon}^{\lambda+\epsilon} 1 = 2\epsilon$$

οπότε

$$\langle f, \chi_{[a,b]}\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\langle f, \chi_\epsilon^- + \chi_\epsilon^+\rangle = 0$$

όπως θέλαμε. □

Σχόλια (α) Οι συναρτήσεις $\chi_{[a,b]}$ και ϕ που χρησιμοποιήσαμε ανήκουν στον $L^2([0,1])$. Πράγματι, αν ονομάσουμε $\chi_n : [0,1] \to [0,1]$ μια συνεχή συνάρτηση που ισούται με 1 στο $[a,b]$ και με 0 στο $[0, a-\frac{1}{n}] \cup [b+\frac{1}{n}, 1]$, τότε εύκολα φαίνεται ότι $|\chi_{[a,b]}(s) - \chi_n(s)|^2 \le 1$ για κάθε $s \in [0,1]$ και $|\chi_{[a,b]}(t) - \chi_n(t)| > 0$ μόνο όταν $t \in (a-\frac{1}{n}, a) \cup (b, b+\frac{1}{n})$, οπότε

$$\int_0^1 |\chi_{[a,b]} - \chi_n|^2 \le \frac{2}{n}$$

[1] Αν η f είναι συνεχής, αυτό είναι άμεσο. Όμως τα “υπόλοιπα” στοιχεία του $L^2([0,1])$ τα γνωρίζουμε μόνο “κατά προσέγγιση”...

πράγμα που σημαίνει ότι η $\chi_{[a,b]}$ προσεγγίζεται ως προς τη $\|\cdot\|_2$ από ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, και το ίδιο ισχύει για την ϕ (από την ακολουθία $\left(\frac{1}{t-\lambda}\chi_n(t)\right)$, με n αρκετά μεγάλο ώστε $\lambda \notin [a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$).

(β) Η $\|\cdot\|_2$-κλειστή γραμμική θήκη $\overline{V}$ του συνόλου $V := \text{span}\{\chi_{[a,b]} : [a,b] \subseteq [0,1]$ ισούται με τον $L^2([0,1]$.

Για να το δούμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το $\overline{V}$ περιέχει κάθε συνεχή συνάρτηση. Όμως κάθε συνεχής συνάρτηση f προσεγγίζεται, ομοιόμορφα στο $[0,1]$, από κλιμακωτές συναρτήσεις. Δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση του $[0,1]$ σε ξένα ανά δύο διαστήματα $I_i \subseteq [0,1]$ ώστε $|f(s) - f(t)| < \epsilon$ όταν $t, s \in I_i$, οπότε αν επιλέξουμε τιμές $c_i = f(s_i)$ όπου $s_i \in I_i$ και θέσουμε $g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{I_i}$ θα έχουμε $|f(t) - g(t)| < \epsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$ και επομένως, αν $h := \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\overline{I_i}}$ τότε $h \in V$ και οι h και g θα διαφέρουν σε πεπερασμένο πλήθος σημείων επομένως

$$\|f-h\|_2^2 = \int |f(t) - h(t)|^2 dt = \int |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \epsilon^2$$

πράγμα που δείχνει, αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, ότι $f \in \overline{V}$. □

Απόδειξη με Θεωρία Μέτρου. Αν $f \in L^2([0,1])$, η ισότητα $(A - \lambda I)f = 0$ στον $L^2([0,1])$ σημαίνει

$$(t-\lambda)f(t) = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in [0,1]$$

(ως προς το μέτρο Lebesgue m). Υπάρχει λοιπόν ένα μετρήσιμο σύνολο $N \subseteq [0,1]$ με $m(N) = 0$ ώστε

$$\begin{aligned} (t-\lambda)f(t) = 0 &\quad \text{για κάθε } t \notin N \\ \text{άρα} \quad f(t) = 0 &\quad \text{για κάθε } t \notin N \cup \{\lambda\}\,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε όμως ότι το μονοσύνολο $\{\lambda\}$ έχει μέτρο Lebesgue 0, οπότε $m(N \cup \{\lambda\}) = 0$. Δηλαδή η τελευταία ισότητα λέει ότι $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε $t \in [0,1]$, δηλαδή η f ορίζει το μηδενικό στοιχείο του $L^2([0,1])$, οπότε το λ δεν είναι ιδιοτιμή του A. □

Σχόλιο Η απόδειξη αυτή είναι βεβαίως πολύ πιό «άμεση», στηρίζεται όμως στην έννοια του συνόλου μέτρου μηδέν.

Επίσης δείχνει ότι το συμπέρασμα ισχύει επειδή τα μονοσύνολα έχουν μέτρο Lebesgue 0. Αν αντί για το μέτρο Lebesgue είχαμε π.χ. το μέτρο μ στο $[0,1]$ όπου

$$\mu(X) = \begin{cases} m(X) & \text{αν } \frac{1}{2} \notin X \\ m(X) + b & \text{αν } \frac{1}{2} \in X \end{cases} \qquad (X \subseteq [0,1] \text{ Borel})$$

(όπου $b > 0$ ένα «βάρος»), τότε στον χώρο $L^2([0,1], \mu)$ η συνάρτηση $f := \chi_{1/2}$ δεν είναι το μηδενικό στοιχείο του χώρου ($\|f\|_2^2 = \int |f|^2 d\mu = \mu(\{\frac{1}{2}\}) = b > 0$) και έχουμε $(t - \frac{1}{2})f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,1]$ οπότε το $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή.