Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις III

Παράδοση: 3 Δεκεμβρίου 2022

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία
$(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \Longleftrightarrow PQ = QP$.

2. (α) Αν $V \in \mathcal{B}(H, K)$ ονομάζω $D := V^*V \in \mathcal{B}(H)$ και $R := VV^* \in \mathcal{B}(K)$. Αποδείξτε τις ισοδυναμίες:

$$D \text{ προβολή } \iff VV^*V = V \iff V^*VV^* = V^* \iff R \text{ προβολή.}$$

(Όπως είδαμε, οι συνθήκες αυτές ισχύουν αν-ν η V είναι μερική ισομετρία, και τότε ο αρχικός της χώρος είναι ο $D(H) = (\ker V)^\perp$ και ο τελικός της χώρος είναι ο $R(K) = V(H)$.)

(β) Αν $V_1, V_2 \in \mathcal{B}(H)$ είναι μερικές ισομετρίες και $D_i := V_i^* V_i,\ R_i := V_i V_i^*$ $(i = 1, 2)$, δείξτε ότι η σύνθεση $V_1 V_2$ είναι μερική ισομετρία αν-ν $D_1 R_2 = R_2 D_1$. (Μια ειδική περίπτωση (εξηγείστε γιατί) που έχουμε ήδη δείξει είναι ότι το γινόμενο δυο προβολών είναι προβολή αν-ν οι προβολές μετατίθενται.)

3. Αν H, K είναι διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, δείξτε ότι ο T προσεγγίζεται *κατά σημείο* από ακολουθία (T_n) φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης. (Μπορεί να χρησιμεύσει η Άσκηση II.1).

Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι εν γένει δεν ισχύει ότι $\lim_n \|T_n - T\| = 0$.

4. Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) ο A είναι συμπαγής

(β) ο $|A| \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής

(γ) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$.

5. Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής. Αποδείξτε ότι οι χώροι $\overline{\mathrm{im} K} \subseteq H_2$ και $(\ker K)^\perp \subseteq H_1$ είναι διαχωρίσιμοι. Να μην χρησιμοποιήσετε ότι ο K προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας τελεστή από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.
(Υπόδειξη προαιρετική: Στην Πραγματική Ανάλυση μαθαίνουμε ότι ένας συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος και ότι ένας υπόχωρος ενός διαχωρίσιμου *μετρικού* χώρου είναι διαχωρίσιμος.)

6. Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y\rangle| \le |\langle Kx, y\rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \le A \le K$ είναι συμπαγής.

7. Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής.

(α) Αν οι $A_n, A \in \mathcal{B}(H_2)$ ικανοποιούν $A_n y \to Ay$ για κάθε $y \in H_2$ και $\sup_n \|A_n\| < \infty$, δείξτε ότι $\|A_n K - AK\| \to 0$. (Η συνθήκη $\sup_n \|A_n\| < \infty$ έπεται αυτομάτως (αφού η (A_n) είναι κατά σημείο συγκλίνουσα ακολουθία φραγμένων τελεστών) από την αρχή ομοιομόρφου φράγματος, που μπορεί κάποιοι να έχουν ακούσει σε άλλο μάθημα...)

(β) Το ανάλογο του (α) «από τα δεξιά» δεν ισχύει : Για παράδειγμα, αν $H_1 = H_2 = \ell^2$ και $K = e_1 e_1^*$, δείξτε ότι η ακολουθία (B_n) όπου $B_n = (S^*)^n$ ικανοποιεί $B_n x \to 0$ για κάθε $x \in H_1$, αλλά δεν ικανοποιεί $\|K B_n\| \to 0$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) και μια ορθοκανονική βάση στον χώρο $\mathrm{im} K$ (που δείξατε ότι είναι πάντα διαχωρίσιμος), δώστε μια άλλη απόδειξη ότι ο K προσεγγίζεται από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.

8. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάχει n_ϵ ώστε *για κάθε* $x = (x(k)) \in C$ να έχουμε $\sum\limits_{k>n_\epsilon} |x(k)|^2 < \epsilon^2$.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

9. Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Έστω $k \in C([a,b] \times [a,b])$ (ή $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ αν θέλετε). Δείξτε ότι ο τελεστής $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a,b])$ με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b])$$

είναι συμπαγής.

Μια ιδέα για την απόδειξη. Προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης.