Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙ

Παράδοση: 19 Νοεμβρίου 2022

1. Θεωρούμε (διαχωρίσιμους) χώρους Hilbert H_1 και H_2 και επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ του H_1 και $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ του H_2. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$, δείξτε ότι

$$\|T\| = \sup\left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \le 1, \sum_{i1}^n |y_i|^2 \le 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. (α) Αν $\dim H < \infty$, δείξτε ότι κάθε ισομετρία $S \in \mathcal{B}(H)$ είναι επί, μάλιστα είναι unitary.

(β) Αν $\dim H = \infty$, δείξτε υπάρχουν δυο ισομετρίες $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$ με $\mathrm{im}(S_1) \perp \mathrm{im}(S_2)$.

3. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο T απεικονίζει *μια* ορθοκανονική βάση του H_1 σε ορθοκανονικό σύνολο.

(β) Ο T απεικονίζει *κάθε* ορθοκανονική βάση του H_1 σε ορθοκανονικό σύνολο.

(γ) Ο T είναι ισομετρία.

Διατυπώστε κι αποδείξτε αντίστοιχες ισοδύναμες συνθήκες με την «ο T είναι unitary».

4. (α) Αν $X \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $Y \in \mathcal{B}(H_2)$ θετικός, δείξτε ότι ο $X^*YX \in B(H_1)$ είναι θετικός τελεστής.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, δείξτε ότι $\ker(A+B) = \ker A \cap \ker B$.

5. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{smallmatrix}\right]$, δηλαδή $T = \left[\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix}\right]$.

Να δειχθεί ότι $\|A\| \le 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2} .)$$

6. Θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T = \left[\begin{smallmatrix} X & Y \\ 0 & W \end{smallmatrix}\right]$ όπου $X, Y, W \in \mathcal{B}(H)$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.

7. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, είναι αλήθεια ότι ο χώρος $T(H_1)$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H_2; [Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

8. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Να δειχθεί ότι $\overline{A(H_1)} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$. Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$. Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$;

9. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $A = U|A|$ η πολική αναπαράσταση του A, όπου U μερική ισομετρία με $\ker U = \ker A$. Δείξτε ότι ο U^*U είναι η προβολή στον χώρο $(\ker A)^\perp$, ο UU^* είναι η προβολή στον χώρο $(\ker A^*)^\perp$, και ότι $U^*A = |A|$.

Αν $H_1 = H_2$ και $A^*A = AA^*$, είναι αλήθεια ότι $UU^* = U^*U$;

10. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι χώρου Hilbert H.

(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, δείξτε ότι ο $M + N$ είναι κλειστός.

(β) Πρτρ. Ξέρουμε ότι αν $M \perp N$, τότε ο $M + N$ είναι κλειστός (Πυθαγόρειο...).

Όμως: Πρδγ: Αν $M = \ell^2 \oplus \{0\} := \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \mathrm{Gr}(D_a) := \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, δείξτε ότι (M, N κλειστοί αλλά) $M + N$ όχι κλειστός.

11. Έστω P_1, P_2, R ανά δύο κάθετες προβολές σ' έναν χώρο Hilbert H. Δείξτε ότι οι $P := P_1 + R$ και $Q := Q_1 + R$ είναι προβολές που μετατίθενται: $PQ = R = QP$.

Αντίστροφα, αν P και Q είναι προβολές που μετατίθενται και θέσω $R = QP$ δείξτε ότι τότε οι $P_1 := P - R$ και $Q_1 := Q - R$ είναι κάθετες προβολές.