

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία  
Γραμμικών Τελεστών! (712)

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/>

Χειμερινό Εξάμηνο 2022-2023

# Περιεχόμενα

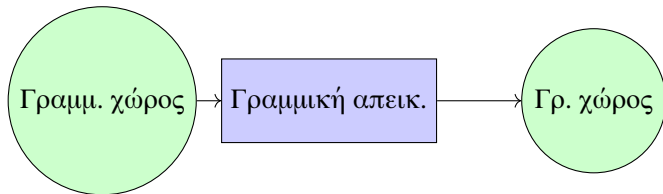
- 1 Εισαγωγικά
- 2 Γραμμικοί χώροι
- 3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο
  - Χώροι Hilbert
  - Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz
  - Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί
  - Η πλήρωση. Ο χώρος  $L^2$
- 4 Φραγμένοι τελεστές
  - Γραμμικοί τελεστές και πίνακες
  - Φραγμένοι τελεστές
  - Ο συζυγής τελεστής
  - Παραδείγματα
  - Ο Χώρος των Τελεστών
- 5 Κατηγορίες τελεστών
  - Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary
  - Θετικοί τελεστές
  - Τετραγωνική ρίζα - Πολική αναπαράσταση
  - Προβολές
- 6 Πίνακες Τελεστών και αναλλοίωτοι υπόχωροι
- 7 Συμπαγείς τελεστές
- 8 Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών
  - Ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα
  - Το Φασματικό Θεώρημα
  - Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm
  - Ο Συναρτησιακός Λογισμός

## Γουατ ιξ αν Οπερείτωρ?



Αρχή της υπέρθεσης (superposition principle).

Αν στην είσοδο  $u_1$  αντιστοιχεί έξοδος  $v_1$  και στην είσοδο  $u_2$  αντιστοιχεί έξοδος  $v_2$  και  $\lambda$  αριθμός, τότε για την είσοδο  $u_1 + \lambda u_2$  αναμένουμε έξοδο  $v_1 + \lambda v_2$ .



## Γουατ ιξ αν Οπερέιτωρ?

**Παράδειγμα 1.**  $T : f \mapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$ : διαφορικός τελεστής  
(εδώ οι  $a_i$  είναι «καλές» συναρτήσεις).

Πού ορίζεται; Στον χώρο  $C_2(\Omega)$ .

**Παράδειγμα 2.**

$$T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad ([x_i] \in \mathbb{C}^n, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$$

**Παράδειγμα 3.**  $T : f \mapsto Tf$  όπου  $(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$ :  
 ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ  $g$  «καλή» συνάρτηση,  $2\pi$ -περιοδική).  
 Παρατήρηση: Αν  $f_n(x) = e^{inx}$  βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

όπου  $\hat{g}(n)$  (μιγαδικοί) αριθμοί.

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ , ο  $T$  **διαγωνοποιήθηκε!**

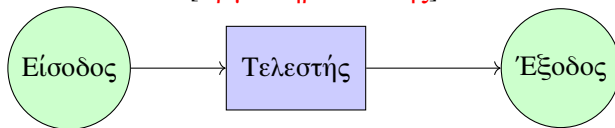
$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Γιατί; Γιατί είναι **ορθοκανονική**. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγει. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

# Alice και Bob στην QIT (Κβαντική Θ. Πληροφορίας)

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]

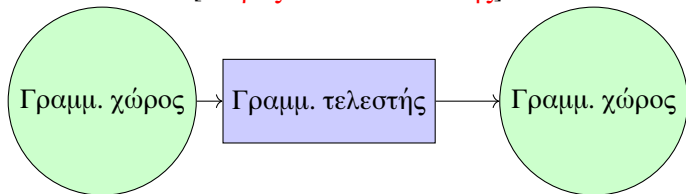


Μετάδοση Πληροφοριών

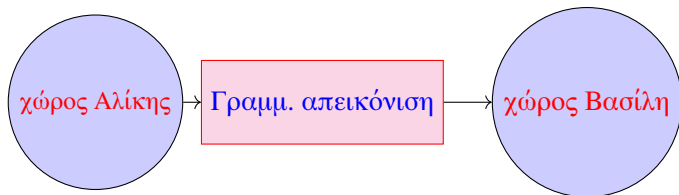


# Τελεστές και Υπερτελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]



[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης  $\rightarrow$  Βασίλη]



# Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$  είναι το σώμα  $\mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ .

## Ορισμός

Ένα  $X \neq \emptyset$  λέγεται  **$\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος** αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις  $+$  :  $X \times X \rightarrow X$  και  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$  ώστε

(I) **Αξιώματα της πρόσθεσης**:  $\forall x, y, z \in X$ ,

(i)  $x + y = y + x$ .

(ii)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ .

(iii)  $\exists \vec{0} \in X$  ώστε  $\forall x \in X, \vec{0} + x = x$ .

(iv)  $\forall x \in X \exists (-x) \in X$  ώστε  $x + (-x) = \vec{0}$ .

(II) **Αξιώματα του πολλαπλασιασμού**:  $\forall x, y \in X$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,

(i)  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ .

(ii)  $1x = x$ .

(iii)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ .

(iv)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .



- Το  $\mathbb{C}$ .
- Αν  $n \in \mathbb{N}$ , ο  $\mathbb{C}^n$  που αποτελείται από όλες τις  $n$ -αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του  $\mathbb{C}^n$  ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο  $T$  σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

## Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.

Έστω  $e_m = (\delta_m(n))$  όπου  $\delta_m(n) = 1$  όταν  $n = m$  και  $\delta_m(n) = 0$  αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια  $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον  $c_{00}$ : κάθε  $x = (x(n)) \in c_{00}$  γράφεται

(μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός  $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$ .

Δηλαδή η  $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$  είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του  $c_{00}$ .

Παρατηρούμε ότι ο  $c_{00}$  είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  των οποίων ο φορέας  $\text{supp } x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$  είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο  $\{1, 2, \dots, n_x\}$ ).

## Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

- Αν  $A \neq \emptyset$  και  $\mathbb{K}^A$  είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων  $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ , τότε το  $\mathbb{K}^A$  γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:  
αν  $f, g \in \mathbb{K}^A$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ , ορίζουμε  $f + g, \lambda f \in \mathbb{K}^A$  θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

- Παράδειγμα: Αν  $A = [n] \times [m]$  (εδώ  $[n] := \{1, \dots, n\}$ ) τότε  $\mathbb{K}^A$  είναι ο χώρος των  $M_{nm}(\mathbb{K})$  των  $n \times m$  πινάκων με συντελεστές από το  $\mathbb{K}$ .

## Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

- Ο χώρος  $\mathcal{R}[0, 1]$  των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ .

Κάθε συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  γράφεται μοναδικά  $f = u + iv$  όπου  $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$ ,  $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$  (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η  $f$  λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι  $u$  και  $v$  είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i \int v(t)dt,$$

Ο  $\mathcal{R}[0, 1]$  είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

- Ο χώρος  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$  αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ.  $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$ . Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

# Γραμμικοί χώροι

Αν  $E$  γραμμικός χώρος και  $x \in E$ ,  $A \subseteq E$ , λέμε ότι το  $x$  ανήκει στην **γραμμική θήκη του  $A$**  (γράφουμε  $x \in \text{span}(A)$ ) ή ότι είναι **γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του  $A$** , αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος)  $x_1, \dots, x_n \in A$  και  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα  $y_1, \dots, y_m$  λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το  $\vec{0}$  είναι **μη τετριμμένος** γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν  $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ , **όχι όλα 0**, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν δεν υπάρχουν τέτοια  $\mu_k$ , δηλαδή αν

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

# Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό  $M \subseteq E$  λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν περιέχει **κάποια**  $y_1, \dots, y_m$  που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο  $x \in M$  που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του  $M \setminus \{x\}$ , δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του  $M \setminus \{x\}$ .

Το  $M$  είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν για κάθε **πεπερασμένο** σύνολο  $\{x_1, \dots, x_n\}$  στοιχείων του  $M$  ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ένας  $F \subseteq E$  λέγεται **(γραμμικός) υπόχωρος** του  $E$  αν  $\text{span}(F) \subseteq F$ , δηλαδή αν

$$x, y \in F \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \implies x + \lambda y \in F.$$

## Ορισμός

Έστω  $E, F$  (πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  λέγεται **γραμμική** αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται **(γραμμικός) ισομορφισμός** αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι  $E, F$  λέγονται **ισόμορφοι** αν υπάρχει ισομορφισμός  $T : E \rightarrow F$ .

# Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

## Ορισμός

Έστω  $E$  ένας  $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ ). Ένα **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** στον  $E$  είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i)  $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii)  $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε  $x, x_1, x_2, y \in E$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

άρα (i)'  $\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$ .



# Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

## Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν  $E$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

(a) για κάθε  $x, y \in E$  ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα  $x, y$  είναι γραμμικά εξαρτημένα.

## Πρόταση

Αν  $E$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  όπου  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  είναι νόρμα στον  $E$ .

# Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται **ημι-εσωτερικό γινόμενο**.

Ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον  $\mathbb{C}^n$  ως εξής:  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x(k)}y(k)$ .

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμιά φορά και **χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space)**.

# Γραμμικοί χώροι με νόρμα

**Νόρμα** σε έναν γραμμ. χώρο  $X$  είναι μια απεικόνιση  $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  ώστε για κάθε  $x, y \in X$  και  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

- 1  $\|x\| = 0$  αν και μόνο αν  $x = 0$ ,
- 2  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  και
- 3  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (τριγωνική ανισότητα).

## Ορισμός

Αν  $\|\cdot\|$  είναι μια νόρμα στον  $X$ , τότε το ζεύγος  $(X, \|\cdot\|)$  λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Η συνάρτηση  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  με  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $x, y \in X$  είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον  $X$  από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος  $(X, d)$  είναι πλήρης, ο  $(X, \|\cdot\|)$  λέγεται **χώρος Banach**.

# Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν  $(X, \|\cdot\|)$  είναι χώρος με νόρμα και  $x_n, x \in X$ , τότε  $x_n \rightarrow x$  σημαίνει  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ .

**Παρατήρηση** Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον  $C([a, b])$  (δες πιο κάτω) εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας  $(f_n)$  συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

## Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Επομένως κάθε  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  γίνεται μετρικός χώρος  $(E, d)$  με

$$d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E, d) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E, d) \times (E, d) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

## Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμιου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \text{ τότε } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

## Ορισμός

Δύο στοιχεία  $x, y$  ενός χώρου  $E$  με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά  $x \perp y$ ) όταν  $\langle x, y \rangle = 0$ .

Μια οικογένεια  $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$  λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  για κάθε  $i, j \in I$ .

Ορθοκανονική  $\Rightarrow$  γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

## Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  στον  $E$  ώστε, για κάθε  $k \in \mathbb{N}$ , να ισχύει<sup>1</sup>  $[e_n : n = 1, 2, \dots, k] = [x_n : n = 1, 2, \dots, k]$ .

Κάθε υπόχωρος  $F \subseteq E$  πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση  $\{e_1, \dots, e_n\}$  που είναι ορθοκανονική. Κάθε  $x \in F$  γράφεται

μοναδικά 
$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

---

<sup>1</sup>με  $[A]$  ή  $\text{span } A$  θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός  $A \subseteq E$ .

# Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

## Λήμμα

Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $x \in E$  και  $F$  πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του  $E$ .

(α) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα  $y_x \in F$  που είναι πλησιέστερο στο  $x$ . Αν  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $F$ , το  $y_x$  δίνεται από τον τύπο  $y_x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ .

(β) Επιπλέον το  $x - y_x$  είναι κάθετο στον  $F$  και αντίστροφα, αν  $y \in F$  και  $x - y \perp F$ , τότε  $y = y_x$ .

Δηλαδή, αν δοθεί ορθοκανονική οικογένεια  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο  $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$ .



## Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (β))

Κάθε  $y \in F$  γράφεται  $y = \sum_{k=1}^n \langle y, e_k \rangle e_k$ .

Τώρα:  $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k \rangle = 0 \forall k, \iff$   
 $\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \forall k, \iff y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k = y_x.$

# Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (α))

(α) Αν  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ ,

$$x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = \left( x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left( \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

παρατηρούμε ότι  $u \perp F$  (γιατί  $\langle u, e_k \rangle = 0$  για  $k = 1, \dots, n$ ) και  $v \in F$ ,  
άρα  $v \perp u$ . Πυθαγόρειο:  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$  δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \quad (1) \\ &\geq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2, \text{ ισότητα αν } \langle x, e_k \rangle = \lambda_k \forall k. \end{aligned}$$

## Παρατήρηση

Έστω  $E$  χώρος με εσωτ. γιν. και  $\{e_1, e_2, \dots\}$  ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

(από την (1) με  $\lambda_k = 0$ ). Συνεπώς, αν  $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$

$$\text{dist}(x, F_n)^2 = \inf \left\{ \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 : \vec{\lambda} \in \mathbb{K}^n \right\} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

## Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

$$(i) \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν  $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$ .

## Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

**Ερώτηση** Μπορούμε να βρούμε πόσο κάνει η διαφορά

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 ;$$

## Ορισμός

Ένας χώρος  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

**Παραδείγματα (a)** Ο χώρος  $\mathbb{K}^n$ , εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k)\overline{y(k)}$ , είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$ , αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

**(b)** Κάθε χώρος  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  με εσωτερικό γινόμενο και  $\dim E < \infty$  είναι χώρος Hilbert.

**(c)** Ο χώρος  $\ell^2$ , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$ , είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος  $c_{oo}$  των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος  $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

**(d)** Ο χώρος  $C([a, b])$  **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα  $\|\cdot\|_2$  που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

## Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (II))

Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $F \neq \emptyset$  κυρτό και πλήρες υποσύνολο του  $E$ . Αν  $x \in E \setminus F$ , τότε υπάρχει μοναδικό  $y_x \in F$  πλησιέστερο προς το  $x$ , δηλαδή τέτοιο ώστε

$$\|x - y_x\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}.$$

## Πρόταση (Κάθετο διάνυσμα)

Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $F$  πλήρης γραμμικός υπόχωρος του  $E$ . Αν  $x \in E \setminus F$ , το πλησιέστερο προς το  $x$  στοιχείο  $y_x \in F$  είναι το μοναδικό  $y \in F$  τέτοιο ώστε  $x - y \perp F$ .

## Ορισμός

Το μοναδικό αυτό στοιχείο  $y_x$  του  $F$  ονομάζουμε (ορθή) προβολή του  $x$  στον  $F$ , και το συμβολίζουμε  $P_F(x)$  ή  $P(F)x$ .

## Θεώρημα (Υπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert και  $M$  είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του  $H$  τότε υπάρχει  $z \in H$ ,  $z \neq 0$  ώστε  $z \perp M$ .

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

## Παράδειγμα

Στον  $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος  $M$ , ώστε  $M^\perp = \{0\}$ .

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$



# Ορθogώνιες διασπάσεις

Αν  $A$  είναι μη κενό υποσύνολο του  $H$ , θέτω

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο  $A^\perp$  είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ .

## Θεώρημα (Ορθogώνια διάσπαση)

Αν  $M$  είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

Δηλαδή

$\forall y \in H$  γράφεται μοναδικά  $y = y_M + y_\perp$  όπου  $y_M \in M$ ,  $y_\perp \in M^\perp$ .

Πυθαγόρειο:  $\|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$

## Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert  $H$ . Η απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η  $P_M$  είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις  $M + M^\perp = H$  και  $M \cap M^\perp = \{0\}$ . Η συνέχεια της  $P_M$  προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 = \|y\|^2$$

$$\text{άρα} \quad \|P_M(y)\| = \|y_M\| \leq \|y\|$$

οπότε, αν  $y_n \rightarrow y$  έχουμε

$$\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

**Παρατήρηση - Άσκηση** Όταν  $H$  είναι χώρος Hilbert:

$A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$  πυκνός στον  $H$ .

**Ισοδύναμα** Ένας γραμμικός υπόχωρος  $E$  ενός χώρου Hilbert  $H$  είναι πυκνός (dense) στον  $H$  αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του  $H$  που είναι κάθετο στον  $E$  είναι το  $0$ .

Έστω  $H$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $A \subseteq H$  μη κενό.

- 1  $A^\perp$  κλειστός υπόχωρος του  $H$  και  $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$ .
- 2 Αν  $H$  Hilbert:  $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\text{span } A} = H$ .
- 3  $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ .
- 4  $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$ .
- 5  $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$ .
- 6 Αν  $H$  Hilbert και  $E$  κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε  $E = E^{\perp\perp}$ .
- 7 Αν  $H$  Hilbert και  $E, F$  κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με  $E \perp F$ , τότε  $E + F$  κλειστός.

# Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

## Λήμμα

Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν  $x \in E$ , ονομάζουμε  $f_x$  την απεικόνιση

$$f_x : E \rightarrow \mathbb{K} : y \rightarrow \langle y, x \rangle.$$

Η  $f_x$  είναι γραμμική και συνεχής.

## Παράδειγμα

Στον  $E = c_{00}$ , η γραμμική μορφή

$$f : E \rightarrow \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής  $f = f_x$  με  $x \in c_{00}$ .

## Θεώρημα (Riesz)

Έστω  $H$  χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$  υπάρχει μοναδικό  $x \in H$  ώστε  $f = f_x$ , δηλαδή

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } y \in H.$$

# Ορθοκανονικές Βάσεις

**Υπενθύμιση** Ένα υποσύνολο  $X$  ενός  $\mathbb{K}$ -γραμμικού χώρου  $V$  είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$ .

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο  $X$  είναι **(αλγεβρική) βάση** του  $V$  αν η γραμμική του θήκη  $\text{span}(X)$  ισούται με  $V$ , δηλαδή αν κάθε  $v \in V$  είναι γραμμικός συνδυασμός  $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$  στοιχείων  $x_k \in X$ .

## Ορισμός

Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια  $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$  λέγεται **ορθοκανονική βάση** του  $E$  αν

(i) είναι ορθοκανονική και

(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του  $E$ , δηλ.

$$\overline{\text{span}\{e_i : i \in I\}} = E.$$

**Παρατήρηση** Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

## Παραδείγματα

- 1** Έστω  $e_m = (\delta_m(n))$  όπου  $\delta_m(n) = 1$  όταν  $n = m$  και  $\delta_m(n) = 0$  αλλιώς. Η οικογένεια  $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$  είναι ορθοκανονική στον  $\ell^2$ . Είναι αλγεβρική βάση του  $c_{00}$ , άρα και ορθοκανονική του βάση.
- 2** Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του  $\ell^2$ , γιατί  $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$ . Επειδή ο υπόχωρος  $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$  είναι πυκνός στον  $\ell^2$ , η  $\{e_m\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $\ell^2$ .
- 3** Στον χώρο  $(C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle))$  η οικογένεια  $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$  όπου  $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$  είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η  $\{f_m\}$  δεν είναι αλγεβρική βάση του  $(C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle))$ . Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε  $f \in (C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle))$  προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$  από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η  $\{f_m\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $(C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle))$ .

## Παρατήρηση

Έστω  $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$  ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ . Η  $\mathcal{C}$  είναι ο.κ. βάση του  $H$  αν και μόνον αν είναι **μεγιστική**, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του  $H$  (εκτός από την  $\mathcal{C}$ ), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του  $H$  που είναι κάθετο στην  $\mathcal{C}$  είναι το  $0$ .

## Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος<sup>2</sup> χώρος  $E$  με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν  $F \subseteq E$  πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του  $E$  **μέσα στον**  $F$  (π.χ.  $E = C([0, 1])$  και  $F =$  πολυώνυμα).

---

<sup>2</sup>Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.



## Άσκηση

Έστω  $E$  χώρος με εσωτερικό γινόμενο,  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονική ακολουθία στον  $E$  και  $x \in E$ . Τότε

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \text{ αν και μόνον αν } x \in \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου  $K = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Θεώρημα

Έστω  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονική **βάση** σ' έναν χώρο  $E$  με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε  $x \in E$ ,

$$(i) \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \quad (\text{σύγκλιση ως προς τη νόρμα του } E).$$

$$(ii) \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \quad (\text{Ισότητα Parseval}).$$

## Πόρισμα

Αν  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο  $E$ , για κάθε  $x, y \in E$  έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}.$$

# Ισομορφισμοί

Δείξουμε:

Έστω  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο  $E$  με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε  $x \in E$ ,  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ .

Άρα η απεικόνιση  $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$  είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον  $\ell^2$ .

## Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος<sup>3</sup> χώρος Hilbert  $H$  είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον  $\ell^2$ .

Ακριβέστερα, *αν επιλέξουμε* μια ορθοκανονική βάση  $\{x_n\}$  του  $H$ , η απεικόνιση

$$U : H \xrightarrow{\sim} \ell^2 : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον  $H$  (γραμμικά και) *ισομετρικά επί* του  $\ell^2$ .

---

<sup>3</sup>Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον  $\ell^2(\Gamma)$  για κατάλληλο σύνολο  $\Gamma$ . (Αποδ. παραλείπεται.)

## Πρόταση

Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση  $\phi : E \rightarrow H$  με πυκνή εικόνα.

Ο  $H$  είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν  $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώρος Hilbert και  $\psi : E \rightarrow K$  γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία  $T$  από τον  $H$  **επί** του  $K$  ώστε  $T(\phi(x)) = \psi(x)$  για κάθε  $x \in E$ .

Ο χώρος Hilbert  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  λέγεται **η πλήρωση** του  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & \phi(E) & \hookrightarrow & H = \overline{\phi(E)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{---} & & \downarrow T \\ E & \xrightarrow{\psi} & \psi(E) & \hookrightarrow & K = \overline{\psi(E)} \end{array}$$

Δείτε και το αρχείο [complun.pdf](#).

## Ο $L^2([a, b])$ , ο $L^2(\mathbb{R})$

**Χωρίς Μέτρο** Θεωρώ τον  $E = (C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  όπου

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Ονομάζω  $L^2([a, b])$  την πλήρωση του  $E$ .

Θεωρώ τον  $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$

(όπου  $f \in C_c(\mathbb{R})$  σημαίνει  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής και υπάρχει  $K_f \subseteq \mathbb{R}$  συμπαγές ώστε  $f(t) = 0$  όταν  $t \notin K_f$ ).

$$\text{Θέτω } \langle f, g \rangle = \int_{K_f} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Ονομάζω  $L^2(\mathbb{R})$  την πλήρωση του  $F$ .

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι **ορισμοί** των χώρων Hilbert  $L^2([a, b])$  και  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ενημερωτικά παρατίθενται στις επόμενες δυο διαφάνειες οι (ισοδύναμοι) ορισμοί με χρήση Θεωρίας Μέτρου.

# Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$ , ο $L^2(\mu)$

**Με Μέτρο** (Μέτρον Ἀριστον!) Έστω  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  χώρος μέτρου (π.χ.  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ ).

## Ορισμός

Ο χώρος  $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$  αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  (ή  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν  $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$ .

Ο αριθμός  $\left( \int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$  συμβολίζεται  $\|f\|_2$ .

Θέτω  $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$ .

Αν  $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$ , έχω  $f = g$   $\mu$ -σχ. παντού  $\iff f - g \in \mathcal{N}$ .

Επίσης, ο  $\mathcal{N}$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{L}^2$ .

Θέτω  $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$ . Είναι καλά ορισμένη **νόρμα** στον χώρο πηλίκου  $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$ .

Έπεται ότι ο  $L^2(\mu)$  αποτελείται από τις **κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων** του  $\mathcal{L}^2(\mu)$  modulo ισότητα  $\mu$ -σχ. παντού.

## Ο $L^2([a, b])$ , ο $L^2(\mathbb{R})$

**Θεώρημα (Riesz–Fisher)** Ο  $L^2(\mu)$  είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η  $\|\cdot\|_2$  προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο

$$\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(t).$$

**Θεώρημα** (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο  $C([a, b])$  είναι πυκνός στον  $L^2([a, b], \mathcal{B}, m)$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ , βεβαίως.

Ο  $C_c(\mathbb{R})$  είναι πυκνός στον  $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_2$ .

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος σε κλειστό υπόχωρο.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης  $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ .  
(Άρα ισομορφισμός με  $\ell^2(\Gamma)$ )

Συμβολισμός:  $\ell^2[n] = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ .

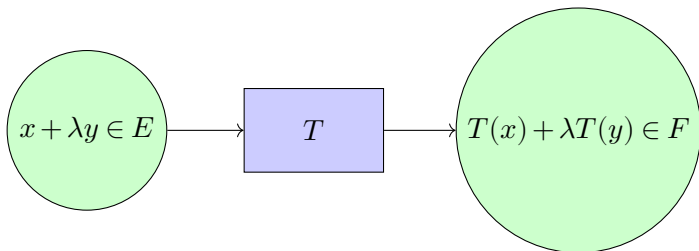
Όποιος ενδιαφέρεται για τον  $\ell^2(\Gamma)$  (για τυχόν  $\Gamma$ ) ας δει το αρχείο [nonsep.pdf](#).



# Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

## Ορισμός

Αν  $E, F$  είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε  $\mathcal{L}(E, F)$  το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων  $T : E \rightarrow F$ . Όταν  $E = F$ , γράφουμε  $\mathcal{L}(E)$  αντί για  $\mathcal{L}(E, E)$ .



## Πίνακες και Τελεστές

- Κάθε  $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση  $T_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

- Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  του  $F$  ορίζει ισομορφισμούς  $V : E \rightarrow \mathbb{K}^m, W : F \rightarrow \mathbb{K}^n$ , οπότε ο πίνακας  $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \langle \tilde{T}_A e_k, f_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

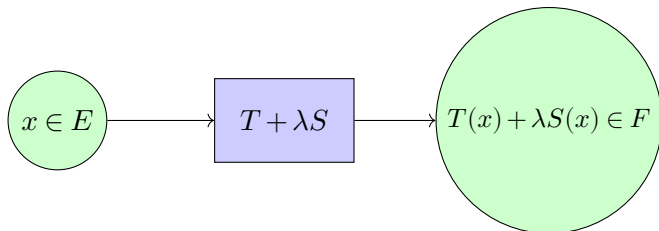
- Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  ορίζει έναν  $n \times m$  πίνακα  $A_T = [a_{ik}]$  από την σχέση  $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$ .

Ο γραμμικός χώρος  $\mathcal{L}(E, F)$

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \quad (x \in E)$$

το σύνολο  $\mathcal{L}(E, F)$  γίνεται **γραμμικός χώρος**.



Η απεικόνιση  $M_{nm}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) : A \mapsto \tilde{T}_A$  είναι 1-1, επί, γραμμική.

## Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  του  $F$ , η απεικόνιση  $T \rightarrow \langle Te_k, f_i \rangle$  είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο  $\mathcal{L}(E, F)$  επί του γραμ. χώρου  $M_{nm}(\mathbb{K})$ . Όταν  $n = m$ , απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικότερα όταν ορίζεται η σύνθεση).

**Σύνθεση  $\rightsquigarrow$  γινόμενο πινάκων:** Αν επίσης ένας χώρος  $G$  έχει ορθοκανονική βάση  $\{g_1, \dots, g_k\}$ , και  $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$  είναι γραμμικές με  $T \rightsquigarrow [a_{ij}] \in M_{nm}$  και  $S \rightsquigarrow [b_{ij}] \in M_{mk}$  τότε  $ST := S \circ T \rightsquigarrow [c_{ij}] \in M_{nk}$  όπου  $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$ .

# Πίνακες και Τελεστές

Αν  $A \in M_{nm}$ , ορίζουμε  $A^t \in M_{mn}$  τον  $A^t = [b_{ij}]$  όπου  $b_{ij} = a_{ji}$ .

Θέτουμε  $A^* = [\overline{a_{ji}}]$ . Τότε  $\langle \tilde{T}_{A^*} y, x \rangle = \langle y, \tilde{T}_A x \rangle$  για κάθε  $y \in F, x \in E$ .

Συνεπώς:

## Παρατήρηση

Αν  $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο *πεπερασμένης διάστασης*, και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

## Παρατήρηση

Αν  $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

**Ιδέα της απόδειξης:** Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα  $A := A_T$ . Αν  $B$  είναι ο πίνακας  $B = A^*$ , ο τελεστής  $T^* := \tilde{T}_B$  ικανοποιεί την σχέση  $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$  για κάθε  $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$ .

**Ιδιότητες:** Αν  $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \quad (TR)^* = R^* T^*, \quad T^{**} = T.$$

# Τελεστές πρώτης τάξης

Αν  $E, F$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και  $u \in E, v \in F$  ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \rightarrow F : x \rightarrow \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

## Άσκηση

- Ο συζυγής:  $(vu^*)^* = uv^*$
- Βρείτε τη σύνθεση  $(vu^*) \circ (wz^*)$ . Πότε είναι  $=0$ ;
- Όταν οι  $E, F$  είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, κάθε  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  γράφεται  $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$  όπου  $s_k \in \mathbb{K}, u_k \in E, v_k \in F$ .
- Μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια  $\{u_1, \dots, u_N\}$  ορθοκανονική βάση στον  $E$ , ή την  $\{v_1, \dots, v_N\}$  ορθοκανονική βάση στον  $F$ .
- Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές βάσεις με  $N \leq \min(\dim E, \dim F)$ ;

# Φραγμένοι τελεστές

Έστω  $(E, \|\cdot\|_E)$  και  $(F, \|\cdot\|_F)$  χώροι με νόρμα.

*Παρατήρηση.* Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια **σε όλον το χώρο**.

## Ορισμός

Μία γραμμική απεικόνιση  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  λέγεται **φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν

(είναι φραγμένος στην  $\text{ball}(E)$ , δηλ.)

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$ : ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει  $M$  ώστε **για κάθε  $x \in E$**  να ισχύει  $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ .

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν  $T$  γραμμική,

φραγμένη  $\iff$  συνεχής  $\iff$  ομοιόμορφα συνεχής.



Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

## Πρόταση

Έστω  $(E, \|\cdot\|_E)$  χώρος με νόρμα,  $(F, \|\cdot\|_F)$  χώρος Banach,  $D \subseteq E$  πυκνός υπόχωρος και

$$T : D \rightarrow F$$

γραμμική απεικόνιση.

Αν η  $T$  είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση

$$\tilde{T} : E \rightarrow F \quad \text{δηλ. } \tilde{T}|_D = T.$$

Η επέκταση  $\tilde{T}$  είναι μοναδική (αν υπάρχει) και  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

# Παράδειγμα

$$D = c_{00} \subseteq \ell^2, F = \ell^2$$

Αν  $a = (a(n))$  με κάθε  $a(n) \in \mathbb{K}$ , ορίζω

$$T : e_n \mapsto a(n)e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T \left( \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n \right) := \sum_n \langle x, e_n \rangle a(n)e_n$$

$$\text{δηλ.} \quad T((x(n))) := (a(n)x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{00}.$$

Επεκτείνεται σε  $\tilde{T} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  αν-ν η  $(a(n))$  είναι φραγμένη, και

$$\|T\| = \sup_n |a(n)|.$$

Μάλιστα αν η  $(a(n))$  δεν είναι φραγμένη, υπάρχει  $y = (y(n)) \in \ell^2$  ώστε  $(a(n)y(n)) \notin \ell^2$ .

## Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο  $E$  έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  είναι συνεχής.

Πράγματι, επιλέγοντας ορθοκανονική βάση  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  βρίσκουμε

$$\|Tx\|_F \leq \left( \sum_{k=1}^m \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Όμως, αν ο  $E$  έχει άπειρη διάσταση, υπάρχουν ασυνεχείς γραμμικές απεικονίσεις  $T : E \rightarrow F$ , ακόμα κι αν  $\dim F = 1$ .

## Θεώρημα

Αν  $H_1, H_2$  είναι δύο χώροι *Hilbert* και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^*y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  ονομάζεται **ο συζυγής (adjoint)** του  $T$ . Είναι φραγμένος τελεστής και  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Προειδοποίηση** Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

## Πρόταση

Η απεικόνιση  $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_2, H_1)$  έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή  $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda}S^*$ .

(β)  $T^{**} = T$ .

(γ)  $\|T^*\| = \|T\|$ .

(δ) Αν  $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$  φραγμένοι τελεστές,  $(TS)^* = S^*T^*$ .

(ε)  $\|T^*T\| = \|T\|^2$ .

Ειδικότερα (αν  $H_1 = H_2 = H$ ),

η  $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  είναι μια **ενέλιξη (involution)** που ικανοποιεί την λεγόμενη **ιδιότητα  $C^*$** , δηλ. την (ε).

## Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Αν  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις  $\{e_1, \dots, e_m\}$  του  $E$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  του  $F$ , ορίζεται ένας  $n \times m$  πίνακας  $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Αντίστροφα, κάθε  $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$  ορίζει μια μοναδική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

- Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  ορίζει έναν  $\infty \times \infty$  πίνακα  $[\langle Te_k, e_i \rangle]$ , όπου  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του  $\ell^2$ . Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο.  
Παράδειγμα;

## Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• **Διαγώνιοι τελεστές** Αν  $a = (a_n)$ ,  $a_n \in \mathbb{K}$  είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση  $(x(n)) \rightarrow (a_n x(n))$  στέλνει τον  $\ell^2$  στον  $\ell^2$  αν-ν  $(a_n) \in \ell^\infty$  και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή  $D_a$  με νόρμα  $\|D_a\| = \|a\|_\infty$ . Έχουμε  $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$  (διαγώνιος πίνακας). Ο συζυγής του τελεστή  $D_a$  είναι ο  $D_b$ , όπου  $b = a^*$  (δηλαδή  $b(n) = \overline{a(n)}$  για κάθε  $n$ ).

• **Τελεστές Hilbert-Schmidt** Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας  $\infty \times \infty$  πίνακας  $[a_{ik}]$  να ορίζει φραγμένο τελεστή  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  ώστε  $a_{ik} = \langle T e_k, e_i \rangle$  για κάθε  $i, k \in \mathbb{N}$  είναι η 
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$$
 (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{ για κάθε } x \in \ell^2.$$

- Ολοκληρωτικοί τελεστές στον  $L^2([a, b])$ . Αν  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ , ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή  $T_k^o : (C([a, b]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_2)$  φραγμένο, με  $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x, y)|^2 dx dy$ .  
Άρα επεκτείνεται σε  $T_k : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ .



- **Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον  $L^2([a, b])$ .** Αν  $f \in C([a, b])$ , ορίζουμε

$$M_f^o : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]) : g \rightarrow fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή  $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$ , ο  $M_f^o$  επεκτείνεται σε  $M_f : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$  με  $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$  (μάλιστα, ισότητα).

(**Αλλιώς: με μέτρο**) Πάρε  $f \in L^\infty(\mu)$  και όρισε

$M_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu) : g \rightarrow fg$ . Είναι καλά ορισμένος και  $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$  (ισότητα για  $\sigma$ -πεπερασμένο  $\mu$ ).

Ο συζυγής του τελεστή  $M_f$  είναι ο τελεστής  $M_g$  όπου  $g = f^*$ . Δηλαδή  $M_f^* = M_{f^*}$ .

## Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}:$$

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω  $U, V$ :

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή  $(Ux)(n) = x(n-1)$  και  $(Vx)(n) = x(n+1)$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ .  
Προφανώς  $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ , γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι  
 $UV = VU = I$ , δηλ.  $U^{-1} = V$ .

Ο συζυγής του  $U$  είναι ο  $V$ . Άρα  $UU^* = U^*U = I$ .

## Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$  (αλλιώς):

$$Ue_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

$$\text{και } Ve_n := e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z})$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ . Δείχνουμε ότι  $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$  για κάθε  $n, m \in \mathbb{Z}$ , άρα  $V = U^*$  (γιατί;).

- (β) Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :

$$Se_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον  $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ , παρατηρώ ότι είναι  $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ.  $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$  για κάθε  $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$ ), άρα επεκτείνονται σε συστολές  $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ . Δείχνω  $T = S^*$ . (Μάλιστα ο  $S$  είναι ισομετρία. Ο  $S^*$ ;) )

# Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

Στον  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :  $Ue_n = e_{n+1}$  (μετατόπιση δεξιά)

$U^*e_n = e_{n-1}$  (μετατόπιση αριστερά) ( $n \in \mathbb{Z}$ )

Στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ :  $Se_n = e_{n+1}$  (μετατόπιση δεξιά) ( $n \in \mathbb{Z}_+$ )

$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases}$  (μετατόπιση αριστερά)

• (γ) Στον  $L^2(\mathbb{R})$  (translation operators):

Έστω  $t \in \mathbb{R}$ . Αν  $f \in C_c(\mathbb{R})$ , ορίζω  $f_t : s \rightarrow f_t(s) = f(s-t)$ . Τότε  $f_t \in C_c(\mathbb{R})$  και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \rightarrow f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία  $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , επί.

## Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο  $C^1([0, 1])$  των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων<sup>4</sup> ορίζουμε  $Df = f'$ . Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο  $C^1([0, 1])$  του  $L^2([0, 1])$ , αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή  $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ , γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του  $L^2([0, 1])$ : δεν υπάρχει σταθερά  $M < \infty$  ώστε  $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$  για κάθε  $f \in C^1([0, 1])$ .

---

<sup>4</sup>Δηλ. των  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  που έχουν παράγωγο  $f'(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$  (στα άκρα οι πλευρικές) και η  $f' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ .

# Ο Χώρος των Τελεστών

## Ορισμός

Αν  $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$  είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε  $\mathcal{B}(E, F)$  το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (F, \|\cdot\|).$$

Όταν  $E = F$ , γράφουμε  $\mathcal{B}(E)$  αντί για  $\mathcal{B}(E, E)$ .

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \rightarrow Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο  $\mathcal{B}(E, F)$  γίνεται γραμμικός χώρος.

## Πρόταση

Η απεικόνιση  $T \rightarrow \|T\|$  είναι νόρμα στον χώρο  $\mathcal{B}(E, F)$ .  
Αν επί πλέον ο  $F$  είναι πλήρης, ο  $\mathcal{B}(E, F)$  είναι χώρος *Banach*.

# Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν  $E = F$ , ο  $\mathcal{B}(E)$  γίνεται (μη μεταθετική, αν  $\dim E > 1$ ) **άλγεβρα** ως προς τη σύνθεση:  $(TS)(x) = T(S(x))$  ( $x \in E$ ). Μάλιστα  $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$ .

## Ορισμός

Ο **(τοπολογικός) δυικός (dual)**  $E^*$  ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , δηλαδή ο  $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ . Είναι πάντα χώρος Banach.

Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert και για κάθε  $x \in H$  ορίσουμε  $f_x : H \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x \rangle$ , η απεικόνιση

$$H \rightarrow H^* : x \rightarrow f_x$$

είναι **αντι**γραμμική ισομετρία. Το θεώρημα Riesz λέει ότι είναι **επί** του  $H^*$ .

## Ορισμός

Μια απεικόνιση  $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  λέγεται **sesquilinear μορφή** αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε  $y \in H_2$  η απεικόνιση  $x \rightarrow \phi(x, y) : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$  είναι γραμμική.

(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε  $x \in H_1$  η απεικόνιση  $y \rightarrow \overline{\phi(x, y)} : H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  είναι γραμμική.

Μια sesquilinear μορφή λέγεται **φραγμένη**, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα

(iii)  $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$ .

**Παράδειγμα**  $\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle$  όπου  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ .

Μάλιστα  $\|T\| = \|\phi\|$ , δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$



Αν  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\}\end{aligned}$$

Αν  $\dim H_1 = m$ ,  $\dim H_2 = n$  με ΟΚ βάσεις  $\{e_1, \dots, e_m\}$  και  $\{f_1, \dots, f_n\}$  και  $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$  έχουμε

$$\|T\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq 1 \right\}$$

**Ταυτότητα πολικότητας (polarization)** Αν  $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  sesquilinear και  $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, x)$  η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή**,

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

## Πρόταση

*Έστω  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή  $\varphi$  είναι φραγμένη αν η  $\hat{\varphi}$  είναι φραγμένη στη μπάλα του  $H$ . Μάλιστα*

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2 \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

*αν  $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$  για κάθε  $x \in H$ , τότε ισχύει η ισότητα*  
 $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}.$

... αλλά όχι εν γένει.

## Πόρισμα

Έστω  $H$  **μγαδικός** χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση  $T : H \rightarrow H$  είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2 \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν  $T, S \in \mathcal{B}(H)$ , τότε  $T = S$  αν και μόνον αν  $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$  για κάθε  $x \in H$ .

## Πόρισμα

Έστω  $H$  **μγαδικός** χώρος Hilbert και  $T : H \rightarrow H$  φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν  $T = T^*$ , τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

## Θεώρημα

Έστω  $H_1, H_2$  χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή  $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$  ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

## Θεώρημα

Αν  $H_1, H_2$  είναι δύο χώροι Hilbert και  $T : H_1 \rightarrow H_2$  ένας φραγμένος τελεστής, τότε **υπάρχει** ένας μοναδικός τελεστής  $T^* : H_2 \rightarrow H_1$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο  $T^*$  είναι φραγμένος και  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Αποδ.** Η  $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$  είναι sesquilinear και φραγμένη.

## Ορισμός

Έστω  $H_1, H_2$  χώροι Hilbert.

(i) Ένας  $T \in \mathcal{B}(H_1)$  λέγεται **φυσιολογικός (normal)** αν  $T^*T = TT^*$ .  
(σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας  $T \in \mathcal{B}(H_1)$  λέγεται **αυτοσυζυγής (self-adjoint)** αν  $T = T^*$ .  
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

(iii) Ένας  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  λέγεται **ορθομοναδιαίος (unitary)** αν  $T^*T = I_{H_1}$  και  $TT^* = I_{H_2}$ . (σαν τις συναρτήσεις που  $|f(t)| = 1$ )

## Παραδείγματα:

Ο (unilateral) shift  $S$  στον  $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$  δεν είναι φυσιολογικός.

Κάθε  $M_f$  είναι φυσιολογικός.

Ένας  $M_f$  είναι αυτοσυζυγής αν-ν  $f(t) \in \mathbb{R}$  για κάθε  $t$ .

Ο μετασχηματισμός Fourier  $F : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  είναι ορθομοναδιαίος.

## Πρόταση

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H)$ , όπου  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο  $T$  είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν  $\|Tx\| = \|T^*x\|$  για κάθε  $x \in H$ .

## Πρόταση

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H)$ , όπου  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο  $T$  είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν  $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$  για κάθε  $x \in H$ .

Γράφω  $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$ .

## Πρόταση

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H)$ , όπου  $H$  μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο  $T$  είναι αυτοσυζυγής, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

## Πρόταση

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ , όπου  $H_i$  μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε

(i) Ο  $T$  είναι ισομετρία αν και μόνον αν  $T^*T = I_{H_1}$ , ισοδύναμα αν και μόνον αν  $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$  για κάθε  $x, y \in H_1$ .

(ii) Ο  $T$  είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

## Παραδείγματα

Αν  $H_1 = H_2 = H$  με  $\dim H < \infty$ , κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί. Στον  $\ell^2$ , ο  $S : e_n \rightarrow e_{n+1}$  είναι ισομετρία, όχι επί αφού  $e_0 \notin S(\ell^2)$  (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε  $e_n$  υπάρχει ένοικος).

Κάθε  $A \in \mathcal{B}(H)$  γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

## Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής  $T \in \mathcal{B}(H)$  λέγεται **θετικός** (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  για κάθε  $x \in H$ .

Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε  $\mathcal{B}_+(H)$ .

(ii) Αν  $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$ , ορίζουμε  $T \geq S$  αν  $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$  για κάθε  $x \in H$ , αν δηλαδή  $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$ .

**Παρατήρηση:** Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε  $T \in \mathcal{B}(H)$  με  $\langle Tx, x \rangle \geq 0$  για κάθε  $x \in H$  είναι αυτομάτως θετικός.



# Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο  $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$  είναι  $\mathbb{R}$ -χώρος Banach. Ο  $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$  είναι

- κώνος:  $A \geq 0, t \geq 0 \Rightarrow tA \geq 0$ .
- κυρτός:  $A, B \geq 0, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda A + (1 - \lambda)B \geq 0$
- γνήσιος:  $A \geq 0$  και  $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$ .
- παράγει τον  $\mathcal{B}_h(H)$  (full cone):  $\forall T \in \mathcal{B}_h(H) \exists A, B \geq 0 : T = A - B$ .
- $\|\cdot\|$ -κλειστός.

# Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:

Η διάταξη  $\geq$  στον  $\mathcal{B}_h(H)$  είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν  $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ )

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και } \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν  $A \geq 0$  και  $B \geq 0$  τότε  $AB \geq 0$ .

Επίσης, αν  $T_n \geq 0$  και  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ , τότε ο  $T$  είναι θετικός.

$$\text{Αν } A = A^* \text{ τότε } -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$$

$$\text{άρα } A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad (\text{διαφορά δύο θετικών})$$

# Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

## Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω  $B \in \mathcal{B}(H)$  θετικός τελεστής. Τότε για κάθε  $x, y \in H$ ,

$$|\langle Bx, y \rangle|^2 \leq \langle Bx, x \rangle \langle By, y \rangle \quad \text{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x \rangle.$$

## Πρόταση

Έστω  $(B_n)$  αύξουσα (δηλ.  $B_{n+1} - B_n \geq 0 \forall n$ ) και φραγμένη (δηλ.  $\sup_n \|B_n\| < \infty$ ) ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η  $(B_n)$  συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής  $Y$  ώστε  $Yx = \lim_n B_n x$  για κάθε  $x \in H$ .

Επιπλέον  $B_n \leq Y$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και αν  $C$  είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε  $B_n \leq C$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  τότε  $Y \leq C$ .

**Παρατήρηση** Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

# Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας

## Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής  $X \in \mathcal{B}(H)$  ώστε  $X^2 = A$ . Ο τελεστής αυτός λέγεται *τετραγωνική ρίζα* του  $A$  και συμβολίζεται  $A^{1/2}$ .

Ο  $A^{1/2}$  μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον  $A$ .

## Πόρισμα

Αν  $A, B \in \mathcal{B}(H)$  είναι θετικοί τελεστές, τότε ο  $AB$  είναι θετικός αν και μόνον αν  $AB = BA$ .

## Ορισμός

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ . Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή  $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$  συμβολίζεται  $|T|$ .

## Ορισμός

Ένας τελεστής  $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  λέγεται **μερική ισομετρία** (partial isometry) αν ο περιορισμός της  $V$  στον υπόχωρο  $M = (\ker V)^\perp$  είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος  $M$  λέγεται **αρχικός χώρος** και ο υπόχωρος  $V(M)$  (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται **τελικός χώρος** της  $V$ .

# Πολική αναπαράσταση τελεστή

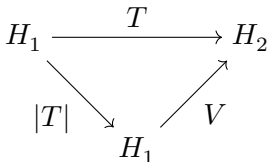
Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός  $z$  έχει μοναδική πολική αναπαράσταση  $z = u|z|$ , όπου  $|z| > 0$  και  $|u| = 1$ .

Θα δείξουμε ότι ένας αυθαίρετος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert δέχεται μία «πολική αναπαράσταση».

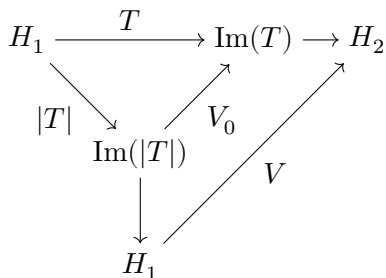
## Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία  $V$  με αρχικό χώρο  $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$  και τελικό χώρο  $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$  ώστε

$$T = V|T|.$$



**Ιδέα της απόδειξης** Παρατηρείς ότι  $\|Tx\| = \||T|x\|$  για κάθε  $x \in H_1$ , οπότε μπορείς να ορίσεις  $V_0 : |T|x \rightarrow Tx$  και να επεκτείνεις...



## Πρόταση

Έστω  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$  αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής  $V_1 : \text{Im}(|T|) \rightarrow \text{Im}(T)$  ώστε  $T = V_1|T|$ .

Επιπλέον, αν  $\dim(\text{Im}(|T|)^\perp) = \dim(\text{Im}(T)^\perp)$  τότε μπορούμε να επεκτείνουμε τον  $V_1$  σε unitary  $U : H_1 \rightarrow H_2$  ώστε  $T = U|T|$ . Όταν  $H_1 = H_2 = \ell^2[n]$  αυτό ισχύει πάντα. Επομένως, κάθε  $n \times n$  πίνακας  $T$  παραγοντοποιείται σε  $T = U|T|$  όπου  $U$  unitary.

**Παρατήρηση** Αν  $P : H \rightarrow H$  γραμμική με  $P = P^2$ ,

$$\begin{aligned}\operatorname{im} P &= \{x \in H : x = Px\}, & \ker P &= \operatorname{im}(I - P) \\ H &= \operatorname{im} P + \ker P, & \operatorname{im} P \cap \ker P &= \{0\}.\end{aligned}$$

Έστω  $M$  κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert  $H$ .

$$H = M \oplus M^\perp : \quad x = x_M + x_{M^\perp}$$

Η **ορθή προβολή επί του  $M$** :  $P_M : H \rightarrow H : x \rightarrow x_M$   
είναι γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ.  $P^2 = P$ ) με  $\|P\| \leq 1$ .

## Πρόταση

Έστω  $H$  χώρος Hilbert και  $P : H \rightarrow H$  γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ.  $P^2 = P$ ). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος  $M$  του  $H$  ώστε  $P = P_M$ .
- (β)  $(\ker P)^\perp = \operatorname{im} P$ .
- (γ)  $\|P\| \leq 1$ .



## Πρόταση

*Έστω  $H$  χώρος Hilbert και  $P \in \mathcal{B}(H)$  ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- (i) Ο  $P$  είναι η ορθή προβολή επί του  $\text{im } P$ .*
- (ii) Ο  $P$  είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*
- (iii) Ο  $P$  είναι φυσιολογικός.*

*Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.*

## Χρήσιμες Παρατηρήσεις

(α) Αν  $P \in \mathcal{B}(H)$ , τότε:  $P$  ορθή προβολή  $\iff P = P^* = P^2$ .

(β) Αν  $P = P^2$ , τότε  $x \in \text{im } P \iff x = Px$  και  
 $x \in \text{ker } P \iff x \in \text{im}(I - P)$ .

(γ) Αν  $P$  ορθή προβολή, τότε  $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$  για κάθε  $x \in H$  και  
 $Py = y \iff \|Py\| = \|y\|$ .

**Πρόταση (Η απεικόνιση  $P \rightarrow \text{im } P$  διατηρεί τη διάταξη)**

*Αν  $P, Q$  είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α)  $P \leq Q$       (β)  $\|Px\| \leq \|Qx\|$  για κάθε  $x \in H$

(γ)  $\text{im } P \subseteq \text{im } Q$       (δ)  $QP = P$       (ε)  $PQ = P$ .

## Πρόταση

Αν  $M, N$  είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert  $H$  και  $P = P(M), Q = P(N)$  είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

(i) Ο τελεστής  $R = PQ$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $PQ = QP$ , αν-ν  $P(N) \subseteq N$ , αν-ν  $Q(M) \subseteq M$ . Τότε  $R = P(M \cap N)$ .

(ii)  $M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0$ .

(iii) Ο τελεστής  $S = P + Q$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $M \perp N$ . Τότε  $S = P(M + N)$ .

(iv) Ο τελεστής  $D = P - Q$  είναι προβολή αν και μόνον αν  $M \supseteq N$ . Τότε  $D = P(M \cap N^\perp)$ .

## Πρόταση

Αν  $P = P(M)$  και  $Q = P(N)$ , όπου  $M, N$  κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert  $H$  και  $L = M \cap N$ , τότε:

Οι προβολές  $P$  και  $Q$  μετατίθενται αν και μόνον αν οι υπόχωροι  $M \cap L^\perp$  και  $N \cap L^\perp$  είναι κάθετοι.

Αν  $M, N$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $H$ , ο  $M \cap N$  είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχεται και στον  $M$  και στον  $N$ .

Ο  $\overline{M + N}$  είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του  $H$  που περιέχει και τον  $M$  και τον  $N$ .

$$\begin{aligned} \text{Συμβολισμοί: } P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M + N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

**Πρτρ:** Έστω  $M, N$  κλειστοί υπόχωροι.

(α) Αν  $M, N$  κλειστοί υπόχωροι και  $\dim N < \infty$ , τότε  $M + N$  κλειστός. (ασκ.)

(β) αν  $M \perp N$ , τότε  $M + N$  κλειστός (γνωστό: από το Πυθαγόρειο...).

(γ) Αν  $M = \ell^2 \oplus \{0\} := \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$  και

$N = \text{Gr}(D_a) := \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$  όπου  $a(n) = \frac{1}{n}$ , τότε  $M, N$  κλειστοί αλλά  $M + N$  όχι κλειστός. (ασκ.)

Γεινικότερα, αν  $H = H_0 \oplus H_0$  και  $M = H_0, N = \text{Gr}(A)$  όπου  $A \in \mathcal{B}(H_0)$  τότε οι  $M, N$  είναι κλειστοί υπόχωροι του  $H$  αλλά ο  $M + N$  είναι κλειστός αν-ν ο χώρος  $\text{im}(A)$  είναι κλειστός στον  $H_0$ .

(Εδώ  $H_1 \oplus H_2$  είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών  $(x, y)$  όπου  $x \in H_1, y \in H_2$  με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x, y), (u, v) \rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2} .)$$

## Πρόταση

Αν  $(Q_i)$  είναι **φθίνουσα** [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο<sup>5</sup> στην προβολή  $Q = P(M)$ , όπου  $M$  είναι η **τομή** [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των  $\text{im } Q_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).

## Πρόταση

Έστω  $(P_n)$  ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ .

(i) Αν οι  $P_n$  είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά  $\sum_n P_n x$  συγκλίνει για κάθε  $x \in H$ , και  $\sum_n P_n x = P(M)x$ , όπου  $M$  είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των  $\text{im } P_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Για κάθε  $x \in H$  ισχύει  $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$ .

(ii) Αν  $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$  για κάθε  $x \in H$ , τότε οι  $P_n$  είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i)).

---

<sup>5</sup>όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν  $\{Q_i\}$  άπειρη

Εναλλακτική προσέγγιση:

## Πρόταση

Έστω  $(P_n)$  ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ , ισχύει ότι  $\sum_{n=1}^m P_n \leq I$ , ισοδύναμα  $\left\| \sum_{n=1}^m P_n \right\| \leq 1$ .

(ii) Οι  $P_n$  είναι ανά δύο κάθετες.

(iii) Για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ , η  $Q_m := \sum_{n=1}^m P_n$  είναι προβολή.

(iv)  $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$  για κάθε  $x \in H$ .

Τότε, για κάθε  $x \in H$  η σειρά  $\sum_n P_n x$  συγκλίνει στο  $P(M)x$ , όπου  $M$  είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των  $\text{im } P_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) και  $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$ .

## Πόρισμα

Αν  $\{M_n\}$  είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert και  $\vee M_n$  ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε  $M_n$ , τότε κάθε διάνυσμα  $x \in \vee M_n$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως συγκλίνουσα σειρά  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  όπου κάθε  $x_n \in M_n$  και  $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$ .



# Πίνακες Τελεστών

Αν  $M \subseteq H$  κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert και  $P = P(M) \in \mathcal{B}(H)$  έχουμε  $P(M^\perp) = I - P := P^\perp$ . Για κάθε  $A \in \mathcal{B}(H)$ ,

$$\begin{aligned} A &= A(P + P^\perp) = (P + P^\perp)A(P + P^\perp) \\ &= PAP + P^\perp AP + PAP^\perp + P^\perp AP^\perp. \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} A_{11} &: M \rightarrow M : x \mapsto PA|_M(x) & A_{12} &: M^\perp \rightarrow M : x \mapsto PA|_{M^\perp}(x) \\ A_{21} &: M \rightarrow M^\perp : x \mapsto P^\perp A|_M(x) & A_{22} &: M^\perp \rightarrow M^\perp : x \mapsto P^\perp A|_{M^\perp}(x) \end{aligned}$$

(οπότε  $A_{11} \in \mathcal{B}(M)$ ,  $A_{12} \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$ ,  $A_{21} \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$ ,  $A_{22} \in \mathcal{B}(M^\perp)$ .) Ως προς τη διάσπαση  $H = M \oplus M^\perp$ , ο  $A$  γράφεται

$$A \simeq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Η αντιστοιχία αυτή μεταξύ τελεστών και πινάκων τελεστών είναι συμβιβαστή με τις πράξεις πινάκων.

## Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας γραμμικός υπόχωρος  $E \subseteq H$  είναι **αναλλοίωτος (invariant)** από έναν φραγμένο τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  αν  $A(E) \subseteq E$ , δηλ. αν  $Ax \in E$  για κάθε  $x \in E$ . Τότε ο κλειστός υπόχωρος  $\overline{E}$  είναι και αυτός  $A$ -αναλλοίωτος. Όταν και ο  $E$  και ο  $E^\perp$  είναι  $A$ -αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος  $E$  **ανάγει (reduces)** τον  $A$ . Γράφοντας  $H = \overline{E} \oplus E^\perp$ , ο  $A$  γράφεται

$$A \simeq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι  $A(E) \subseteq E$  αν και μόνον αν  $A_{21} = 0$ , και ότι ο  $A$  ανάγεται από τον  $E$  αν και μόνον αν  $A_{12} = A_{21} = 0$ .

### Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος  $E$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος αν και μόνον αν  $AP = PAP$  (όπου  $P = P_E$ ). Ο  $E$  ανάγει τον  $A$  αν και μόνον αν  $A(E) \subseteq E$  και  $A^*(E) \subseteq E$ , ισοδύναμα αν και μόνον αν  $AP = PA$ .

## Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

**Παρατήρηση** Αν  $x \in H$ , ο υπόχωρος  $E_x = \overline{\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν λοιπόν ο χώρος  $H$  δεν είναι διαχωρίσιμος και  $x \neq 0$ , ο  $E_x$  είναι μη τετριμμένος (δηλ.  $\neq \{0\}$ ,  $\neq H$ ). Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του  $A$  είναι  $A$ -αναλλοίωτος. Αν ο  $H$  είναι **μγαδικός** χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.

Άρα, και στις δυο αυτές περιπτώσεις, κάθε φραγμένος τελεστής έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.

Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

**Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:**

*Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής  $A$  σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μγαδικό) χώρο Hilbert  $H$  (ισοδύναμα, στον  $\ell^2$ ) έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο;*

## Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Απάντηση: **Άγνωστο**, ακόμα και για αυτοπαθείς χώρους Banach. Για γενικούς χώρους Banach, η απάντηση είναι: **όχι πάντα**.

- Το πρώτο παράδειγμα τελεστή χωρίς αναλλοίωτο υπόχωρο (~1975): P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.
- Στον  $\ell_1$ : C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space  $\ell_1$ , *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.
- Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable  $\mathcal{L}_\infty$ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).
- Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

## Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  μεταξύ δύο γραμμικών χώρων  $E, F$  λέγεται **τάξης  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}$ ) αν ο υπόχωρος  $T(E) = \text{im } T$  έχει διάσταση  $n$ . Γράφουμε  $\text{rank}(T) = n$ . Αν οι  $E, F$  είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με  $\mathcal{F}(E, F)$  το σύνολο των **φραγμένων** γραμμικών απεικονίσεων  $T : E \rightarrow F$  που έχουν **πεπερασμένη τάξη** (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \text{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε  $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$ .

# Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Αν  $H, K$  είναι χώροι Hilbert,  $v \in K$  και  $u \in H$  ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \rightarrow K$$

$$\text{από τον τύπο } vu^*(x) = \langle x, u \rangle v \quad (x \in H).$$

Ο τελεστής  $vu^*$  είναι φραγμένος, και  $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$ .

Κάθε  $T \in \mathcal{F}(H, K)$  πρώτης τάξης ( $\text{rank}(T) = 1$ ) είναι αυτής της μορφής (με  $u, v$  μη μηδενικά).

Κάθε  $A \in \mathcal{F}(H, K)$  γράφεται  $A = \sum_{k=1}^n s_k f_k e_k^*$  όπου  $\{e_k\}$  είναι

ορθοκανονική βάση του  $(\ker A)^\perp = (\ker A^* A)^\perp$  ώστε  $(A^* A)e_k = s_k^2 e_k$  και  $\{f_k := \frac{Ae_k}{s_k}\}$  ορθοκανονική βάση του  $\text{im } A$ .

Ισχύει  $\|A\| = \sup s_k$  και  $A^* = \sum_{k=1}^n s_k e_k f_k^*$ .

Κάθε  $T \in \mathcal{F}(H, K)$  «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των  $(\ker T)^\perp = \text{im } T^*$  και  $T(E) = \text{im } T$ ):

Ως προς τις διασπάσεις  $H = (\ker T)^\perp \oplus \ker T$  και  $K = \text{im } T \oplus (\text{im } T)^\perp$  ο  $T$  γράφεται

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Τοπολογική ιδιότητα:** Αν  $A \in \mathcal{F}(H, K)$ , τότε το  $A(B_H)$  είναι (σχετικά) συμπαγές στον  $K$ .

# Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E, F)$

## Ορισμός

Έστω  $E, F$  χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση  $T : E \rightarrow F$  λέγεται **συμπαγής (compact)** αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα  $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  του  $E$  σε ένα  $\|\cdot\|$ -σχετικά συμπαγές υποσύνολο του  $F$  (αν δηλαδή το  $\overline{T(\hat{B}_E)}$  είναι συμπαγές υποσύνολο του  $F$ ). Γράφουμε  $T \in \mathcal{K}(E, F)$ .

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο  $\overline{T(\hat{B}_E)}$  είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.

Οι **φραγμένοι** τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

## Παράδειγμα

Αν  $a = (a_n) \in c_0$ , ο τελεστής  $D_a = \text{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$  είναι συμπαγής.



**Παρατήρηση.** Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό (πρδγ: Άσκηση! )

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

**Παρατήρηση.**

$$\mathcal{F}(E, F) \subseteq \mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{B}(E, F).$$

αν οι  $E$  και  $F$  είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

**Παραδείγματα** Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο  $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$  όπου  $a_n = \frac{1}{n}$  είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

## Θεώρημα

Έστω  $(X, \rho)$  μετρικός χώρος και  $K \subseteq X$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1 Το  $K$  είναι συμπαγές (δηλ. ο  $(K, \rho|_K)$  είναι συμπαγής χώρος).
- 2 Κάθε άπειρο υποσύνολο  $A$  του  $K$  έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο  $K$ .
- 3 Το  $K$  είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο  $K$  έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο  $K$ ).
- 4 Ο  $(K, \rho|_K)$  είναι **ολικά φραγμένος** (δηλ. για κάθε  $\varepsilon > 0$  ο  $K$  καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας  $\varepsilon > 0$ ) και **πλήρης**.

**Παρατήρηση** Σε πλήρη μετρ. χώρο  $X$ , ένα  $A \subseteq X$  είναι σχετικά συμπαγές (δηλ.  $\overline{A}$  συμπαγές) ανν είναι ολικά φραγμένο.

## Θεώρημα

Έστω  $E, F$  χώροι Banach,  $T : E \rightarrow F$  γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο  $T$  είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο  $A \subseteq E$ , το  $\overline{T(A)}$  είναι συμπαγές.
- (iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία  $\{x_n\}$  του  $E$ , η ακολουθία  $\{Tx_n\}$  έχει  $\|\cdot\|$ -συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (iv) Το σύνολο  $T(B_E)$  είναι ολικά φραγμένο.

# Συμπαγείς Τελεστές

**Παρατήρηση:** Ο  $\mathcal{F}(E, F)$  είναι γραμμικός χώρος.

## Λήμμα

Αν  $E, F$  είναι χώροι Banach, ο  $\mathcal{K}(E, F)$  είναι γραμμικός χώρος: Αν  $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$  και  $\lambda \in \mathbb{C}$ , τότε  $T + \lambda S \in \mathcal{K}(E, F)$ .

**Παρατήρηση:** Γινόμενο φραγμένου τελεστή  $A$  με πεπερασμένης τάξης  $X \in \mathcal{F}(E, F)$  ή πεπερ. τάξης  $X$  με φραγμένο  $B$  είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

## Λήμμα

Αν  $M, E, F, N$  είναι χώροι Banach,

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B}(M, E), X \in \mathcal{K}(E, F) \text{ και } A \in \mathcal{B}(F, N) \\ \implies XB \in \mathcal{K}(M, F) \text{ και } AX \in \mathcal{K}(E, N) \end{aligned}$$

**Παρατήρηση:** Ο υπόχωρος  $\mathcal{F}(E, F)$  δεν είναι κλειστός στον  $\mathcal{B}(E, F)$  (σε απειροδιάστατους χώρους).

## Πρόταση

*Αν  $E, F$  είναι χώροι Banach, ο  $\mathcal{K}(E, F)$  είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach  $\mathcal{B}(E, F)$ , άρα χώρος Banach.*

**Παρατήρηση:** Άρα, αν  $\|A_n - A\| \rightarrow 0$  και κάθε  $A_n$  είναι συμπαγής, τότε ο  $A$  είναι συμπαγής. Όμως: Το **κατά σημείο** όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής.

**Παρατήρηση:** Ειδικότερα το  $\mathcal{K}(E)$  είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach  $\mathcal{B}(E)$ .

## Θεώρημα

Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(H)$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο  $T$  είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία  $\{x_n\}$  του  $H$ , ισχύει  $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ .

(iii) Υπάρχει μια ακολουθία  $\{F_n\}$  από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε  $\|T - F_n\| \rightarrow 0$ .

## Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω  $H, K$  χώροι Hilbert και  $A \in \mathcal{B}(H, K)$ . Ο  $A$  είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $B \in \mathcal{F}(H, K)$  και  $C \in \mathcal{B}(H, K)$  ώστε  $\|C\| < \epsilon$  και  $A = B + C$ . Λέμε ότι «ο  $A$  είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

**Παρατήρηση** Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach (Per Enflo, Acta Math., **130** (1973)).

# Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών



Ο P. Enflo παραλαμβάνει το βραβείο από τον S. Mazur.

# Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

## Πρόταση

Έστω  $H, K$  χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση  $A : H \rightarrow K$  είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι  $\overline{\text{im } A}$  και  $(\ker A)^\perp$  είναι διαχωρίσιμοι.

## Πρόταση

Αν  $H, K$  είναι χώροι Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(H, K)$  τότε

$$T \in \mathcal{K}(H, K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K, H).$$

## Πρόταση

Έστω  $H, K$  χώροι Hilbert και  $T \in \mathcal{B}(H, K)$ . Ο  $T$  είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία  $(x_n)$  του  $H$ , η ακολουθία  $(Tx_n)$  συγκλίνει ως προς την  $\|\cdot\|_K$ .



**Παράδειγμα:** Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Έστω  $k \in C([a, b] \times [a, b])$ . Ο τελεστής  $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a, b])$  με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b])$$

είναι συμπαγής.

**Η ιδέα της απόδειξης.** Προσεγγίζουμε την  $k$  από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης. (Δες και το αρχείο [intops.pdf](#))

## Στόχος: Το Φασματικό Θεώρημα

*Θεώρημα* Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής  $A \in \mathcal{B}(H)$  διαγωνοποιείται στον υπόχωρο  $(\ker A)^\perp$ .

Υπάρχουν δηλαδή  $a(n) \in \mathbb{C}$  και ορθοκανονική βάση  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  του  $(\ker A)^\perp$  ώστε  $Ax_n = a(n)x_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

(Υπενθύμιση. Ο  $(\ker A)^\perp$  είναι διαχωρίσιμος, αφού ο  $A$  είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν  $U : (\ker A)^\perp \rightarrow \ell^2$  είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί  $U(x_n) = e_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $UAU^{-1} = D_a$  (όπου  $D_a = \text{diag}(a(n))$  ο διαγώνιος τελεστής).

## Ορισμός

Έστω  $E$  γραμμικός χώρος,  $A : E \rightarrow E$  γραμμική απεικόνιση. Ένας (μικαδικός) αριθμός  $\lambda$  λέγεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** της  $A$  αν υπάρχει **μη μηδενικό**  $x \in E$  ώστε  $Ax = \lambda x$ . Το  $x$  λέγεται **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** της  $A$  και το σύνολο

$$M_\lambda := \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο **ιδιόχωρος (eigenspace)** της  $A$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda$ . Το σύνολο των ιδιοτιμών της  $A$  συμβολίζουμε  $\sigma_p(A)$ .

## Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος  $M_\lambda$  της  $A$  είναι αναλλοίωτος από την  $A$ , δηλαδή  $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ , και  $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$ .

Μάλιστα ο  $M_\lambda$  είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση  $B$  που μετατίθεται με την  $A$ .

(ii) Αν ο  $E$  είναι χώρος με νόρμα και η  $A$  είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος  $M_\lambda$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $E$ , γιατί  $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$ .

(iii) Αν ο  $E$  είναι (μη μηδενικός) **μιγαδικός** χώρος και  $\dim E = n < +\infty$ , κάθε γραμμική απεικόνιση  $A : E \rightarrow E$  έχει ιδιοτιμές.

Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.

Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

## Παραδείγματα

(α) Στον χώρο  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  θεωρούμε τον τελεστή

$S : e_n \mapsto e_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Ο  $S$  δεν έχει ιδιοτιμές.

Όμως ο  $S^*$  έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών:

$\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ . Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του  $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

(β) Στον χώρο  $\ell^2(\mathbb{Z})$  θεωρούμε τον τελεστή  $U : e_n \mapsto e_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Ο  $U$  δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο  $U^*$  έχει ιδιοτιμές.

(γ) Στον χώρο  $L^2([0, 1])$  θεωρούμε τον τελεστή  $A$  με  $(Af)(t) = tf(t)$  ( $f \in C([0, 1])$ ). Ο  $A$  δεν έχει ιδιοτιμές (δείτε το [sprmultnew.pdf](#)). Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.

(α') Στον  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$  θεωρούμε τον τελεστή  $V : e_n \mapsto \frac{1}{n+1}e_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ). Ο  $V$  δεν έχει ιδιοτιμές και είναι συμπαγής.

Και τα δύο μαζί; Αυτοσυζυγής και συμπαγής;

## Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω  $H$  διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής  $A \in \mathcal{B}(H)$  λέγεται **διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable)** αν υπάρχει μια **ορθοκανονική βάση**  $\{x_n\}$  του  $H$  και μια ακολουθία  $a = (a(n))$  μιγαδικών αριθμών ώστε  $Ax_n = a(n)x_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

Τότε  $a = (a(n))$  φραγμένη και

$$A = U^{-1}D_aU : \quad A \stackrel{u}{\sim} D_a$$

όπου  $U : H \rightarrow \ell^2 : x_n \rightarrow e_n$  είναι unitary. Άρα

διαγωνοποιήσιμος  $\Rightarrow$  φυσιολογικός.

## Πρόταση

Έστω  $H$  διαχωρίσιμος χώρος Hilbert,  $A \in \mathcal{B}(H)$ . Ο  $A$  είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν οι ιδιόχωροι του είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον  $H$ .

Το σύνολο  $\sigma_p(A)$  των ιδιοτιμών ενός διαγωνοποιήσιμου τελεστή είναι (πεπερασμένο ή) αριθμήσιμο. Αν  $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι μια αρίθμηση του  $\sigma_p(A)$  και  $P_n$  είναι η προβολή στον ιδιόχωρο  $M_n$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_n$ , τότε για κάθε  $x \in H$

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

(όπου το άθροισμα συγκλίνει (αν είναι άπειρο) ως προς τη νόρμα του  $H$ ).

# Ένα παράδειγμα

Έστω  $g$  συνεχής συνάρτηση,  $2\pi$ -περιοδική,  $H = L^2([0, 2\pi])$ ,  
 $T : H \rightarrow H : f \mapsto Tf$  όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$$

(ολοκληρωτικός τελεστής). Παρατήρηση: Αν  $f_n(x) = e^{inx}$  βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ , ο  $T$  **διαγωνοποιήθηκε!**

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια  $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  είναι **ορθοκανονική βάση** του  $L^2([0, 2\pi])$ .



# Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

## Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής  $T$  σε έναν (μυγαδικό) χώρο Hilbert  $\mathcal{H}$  διάστασης  $n < \infty$  είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση  $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$  του  $\mathcal{H}$  και  $a(k) \in \mathbb{C}$  ώστε  $Te_k = a_k e_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Ισοδύναμα, ο  $T$  είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής  $U : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2([n])$  ώστε ο  $UTU^{-1}$  να είναι διαγώνιος.

## Λήμμα

Έστω  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  φυσιολογικός τελεστής. Αν  $x \in \mathcal{H}$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $T$  με ιδιοτιμή  $\lambda$ , τότε  $T^*x = \bar{\lambda}x$ .

Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Έστω  $A \in \mathcal{B}(H)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff A - \lambda I \text{ όχι 1-1}$$

$\Downarrow \Uparrow$  όταν  $\dim H < \infty$   $\Uparrow$  όχι πάντα, αν  $\dim H = \infty$

$A - \lambda I$  όχι αντιστρέψιμος

$\Updownarrow$

$$\lambda \in \sigma(A)$$

## Ορισμός

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  είναι το σύνολο

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ όχι αντιστρέψιμος}\}.$$

## Ορισμός

Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή  $A$  σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο} \}.$$

**Ισχύει ότι** το φάσμα  $\sigma(A)$  είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ .

## Πρόταση

*Το  $\sigma(A)$  φράσσεται από  $\|A\|$ : Αν  $|\lambda| > \|A\|$ , ο  $\lambda I - A$  είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι το  $\| \cdot \|$ -όριο της σειράς*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A}{\lambda} \right)^n.$$

Έστω  $H$  χώρος Hilbert.

## Πρόταση

*Έστω  $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ . Τότε*

$$(α) \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

$$(β) \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

*Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.*

## Πόρισμα

Αν  $A \in \mathcal{K}(H)$  και  $A = A^*$ , τότε υπάρχει  $\lambda \in \sigma_p(A)$  με  $|\lambda| = \|A\|$ .

## Παράδειγμα

Αν  $A \in \mathcal{K}(H)$  το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή:  $D_a$  όπου  $a = (\frac{1}{n})$ .  
(Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν  $A \in \mathcal{K}(H)$  τότε  $0 \in \sigma(A)$ .)

Άρα, υπάρχει  $x \in H$  που μεγιστοποιεί τον  $A$ , δηλ.  $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$ .  
Μάλιστα το  $x$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $A$  με ιδιοτιμή  $\|A\|$  ή  $-\|A\|$ .

## Πρόταση

Έστω  $A \in \mathcal{K}(H)$ .

- (i) Κάθε ιδιόχωρος του  $A$  που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.
- (ii) Το σύνολο  $\sigma_p(A)$  των ιδιοτιμών του  $A$  είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

**Παρατήρηση** Η απόδειξη είναι πιο άμεση όταν ο  $A$  είναι φυσιολογικός.

# Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

## Θεώρημα

Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής  $A \in \mathcal{B}(H)$  διαγωνοποιείται στον υπόχωρο  $(\ker A)^\perp$ .

Υπάρχουν δηλαδή  $a(n) \in \mathbb{C}$  και ορθοκανονική βάση  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  του  $(\ker A)^\perp$  ώστε  $Ax_n = a(n)x_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

(Υπενθύμιση. Ο  $(\ker A)^\perp$  είναι διαχωρίσιμος, αφού ο  $A$  είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν  $U : (\ker A)^\perp \rightarrow \ell^2$  είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί  $U(x_n) = e_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε  $UAU^{-1} = D_a$  (όπου  $D_a = \text{diag}(a(n))$  ο διαγώνιος τελεστής).

## Λήμμα

Έστω  $A \in B(H)$  και  $M \subseteq H$  κλειστός  $A$ -αναλλοίωτος υπόχωρος.  
Έστω  $B \in \mathcal{B}(M)$  ο περιορισμός  $B := A|_M$ . Τότε,  $B^* = A^*|_M$  αν και μόνον αν ο  $M$  είναι και  $A^*$ -αναλλοίωτος.

## Παράδειγμα

Αν  $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ( $Ue_n = e_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{Z}$ ), ο υπόχωρος  $M = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq 0\}$  είναι  $U$ -αναλλοίωτος, αλλά ο περιορισμός  $S := U|_M$  δεν ικανοποιεί  $S^* = U^*|_M$ , καθώς  $Se_0 = 0$  ενώ  $U^*e_0 = e_{-1}$ .



# Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

**Υπενθύμιση:** Έστω  $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$  κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert  $H$  και  $M := \bigoplus_n M_n$  το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε  $M_n$ .

Αν  $P_n = P(M_n)$ , η προβολή  $P = P(M)$  στον  $M$  ικανοποιεί  $Px = \sum_n P_n x$  και  $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$  για κάθε  $x \in H$ .

Επομένως αν κάθε  $M_n$  έχει μια ορθοκανονική βάση  $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$ , η  $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$  είναι ορθοκανονική βάση του  $M$ .

# Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν  $A$  είναι *συμπαγής* τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ , τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι ιδιόχωροι  $M_\lambda$  είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον  $H$ .

(ii) Οι αντίστοιχες προβολές  $P_\lambda$  είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση  $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$  του  $\sigma_p(A)$ , αν  $P_n = P_{\lambda_n}$  ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του  $\mathcal{B}(H)$ .

(iii) Ο  $A$  είναι φυσιολογικός.

# Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

## Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή)

Ένας τελεστής  $A$  σ' έναν χώρο Hilbert  $H$  είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία  $(x_n)$  ιδιοδιανυσμάτων του  $A$ , με αντίστοιχες ιδιοτιμές  $(a(n))$  ώστε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| A - \sum_{n=1}^N a(n) P[x_n] \right\| = 0 \quad (\star)$$

(όπου  $P[x_n]$  η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το  $x_n$ ). Τότε η ακολουθία  $(a(n))$ , αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

$$(ii) \iff A \simeq_u D_a \oplus 0$$

# Το Φασματικό Θεώρημα για φραγμένους τελεστές

Για φραγμένους, όχι κατ' ανάγκη συμπαγείς, τελεστές, αποδεικνύεται το

## Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα)

Αν  $A \in \mathcal{B}(H)$  είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει ένας χώρος μέτρου  $(X, \mu)$ , ένας ισομετρικός ισομορφισμός  $U$  του  $H$  επί του  $L^2(X, \mu)$  και μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ώστε να ισχύει

$$UAU^{-1}g = fg \quad g \in L^2(X, \mu).$$

## Πόρισμα

*Έστω  $A$  συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert  $H$ .  
Τότε*

- (i)  $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$
- (ii)  $\|A\| = \max\{|\langle Ax, x \rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}$

## Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρους Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες  $\{x_n\}$  στον χώρο Hilbert  $K$  και  $\{y_n\}$  στον χώρο Hilbert  $H$  και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών  $\{\lambda(n)\}$  ορίζεται φραγμένος τελεστής  $A : H \rightarrow K$  με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

### Θεώρημα

Αν  $A : H \rightarrow K$  είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert  $H$  και  $K$ , υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες  $\{x_n\}$  στον  $K$  και  $\{y_n\}$  στον  $H$  και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών  $\{\lambda(n)\}$  ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του  $\mathcal{B}(H, K)$ .

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος και της πολικής αναπαράστασης τελεστή.

## Θεώρημα

Αν  $K$  είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert <sup>6</sup>  $H$  και  $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$ ,

ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y \quad (3)$$

έχει μοναδική λύση  $x \in H$  για κάθε  $y \in H$ ,

ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Το Θεώρημα έπεται από τα επόμενα δύο Λήμματα.

Για τις αποδείξεις, δείτε το αρχείο [fred23.pdf](#).

---

<sup>6</sup>Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

# Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

## Λήμμα

Αν  $T \in \mathcal{B}(H)$  και  $\|T\| < 1$ , ο  $I - T$  είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το  $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

(ειδική περίπτωση της Πρότασης 89)

## Λήμμα

Έστω  $K \in \mathcal{B}(H)$  συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής  $I - K$  έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.

Δείτε σχετικά και την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα συζήτηση για το θέμα στο blog του Terence Tao

[a-proof-of-the-fredholm-alternative](#)



# Παρατηρήσεις για το φάσμα τελεστή

**Παρατήρηση** Ένας φυσιολογικός τελεστής  $T \in \mathcal{B}(H)$  είναι αντιστρέψιμος αν-ν υπάρχει  $m > 0$  ώστε  $\|Tx\| \geq m\|x\|$  για κάθε  $x \in H$ .

Λέμε τότε «ο  $T$  είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του  $H$ ».

## Πρόταση

Αν  $A \in \mathcal{B}(H)$  είναι φυσιολογικός τελεστής, ένας  $\lambda \in \mathbb{C}$  ανήκει στο φάσμα  $\sigma(A)$  του  $A$  αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία  $(x_n)$  στη μοναδιαία σφαίρα του  $H$  ώστε  $\|Ax_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ .

## Πόρισμα

Το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς.

Το φάσμα ενός θετικού τελεστή αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς.

# Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

## Πρόταση

Αν  $A \in \mathcal{B}(H)$  και  $p$  είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

## Πρόταση

Έστω  $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ . Τότε

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

## Θεώρημα

Αν  $A \in \mathcal{B}(H)$  και  $A = A^*$  και  $p$  είναι πολυώνυμο, τότε

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)}.$$

# Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

## Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

Αν  $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός \*-μορφισμός

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \rightarrow (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο  $p_0(t) = 1$  στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο  $p_1(t) = t$  στον τελεστή  $A$ . Επίσης ισχύει  $\Phi_c(p) = p(A)$  για κάθε πολυώνυμο  $p$ .

## Ορισμός

Έστω  $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση  $\Phi_c : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ . Συνήθως γράφουμε  $f(A)$  αντί για  $\Phi_c(f)$ .

Δηλαδή αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $\sigma(A)$ , ο τελεστής  $f(A) \in \mathcal{B}(H)$  ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0.$$

# Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

## Παρατήρηση

Αν  $f \in C(\sigma(A))$ , ο  $f(A)$  μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον  $A$ . Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του  $A$  είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον  $f(A)$ .

## Πρόταση (Φασματικής Απεικόνισης)

Αν  $A \in \mathcal{B}(H)$  είναι αυτοσυζυγής και  $f \in C(\sigma(A))$ , τότε

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

## Πόρισμα

Έστω  $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$  και  $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής.

- Ο τελεστής  $f(A)$  είναι πάντα φυσιολογικός.
- Ο τελεστής  $f(A)$  είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν  $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$ .

## Πρόταση (Τετραγωνική ρίζα)

Εστω  $A \in \mathcal{B}(H)$ . Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- 1  $O$   $A$  είναι θετικός.
- 2  $A = A^*$  και  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ .
- 3 Υπάρχει θετικός  $B \in \mathcal{B}(H)$  ώστε  $B^2 = A$ .
- 4 Υπάρχει  $X \in \mathcal{B}(H)$  ώστε  $X^*X = A$ .

**Σχόλια** (α) Η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού τελεστή  $A \in \mathcal{B}(H)$  είναι μοναδική. Δείτε την Πρόταση 55.

(β) Τονίζουμε ότι η υπόθεση  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$  δεν εξασφαλίζει ότι ο  $A$  είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  έχει μη αρνητικό φάσμα ( $\sigma(A) = \{0\}$ ) αλλά δεν είναι θετικός:  $\langle Ax, x \rangle = -1$  για  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

# Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

## Πόρισμα

*Κάθε αυτοσυζυγής  $A \in \mathcal{B}(H)$  γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών  $A = A_+ - A_-$  με  $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ . Έχουμε μάλιστα  $|A| = A_+ + A_-$ .*

*Επομένως κάθε  $T \in \mathcal{B}(H)$  είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.*

Αποδείξεις στο αρχείο [funcalc23.pdf](#).

# Ο Συναρτησιακός Λογισμός για συμπαγείς τελεστές

## Πρόταση

Έστω  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$  η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή  $A$ , όπου  $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι μια αρίθμηση του  $\sigma_p(A)$  και  $P_n = P(M_{\lambda_n})$ .

Αν  $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή  $A_f \in \mathcal{B}(H)$ .

Όταν η  $f$  είναι συνεχής, τότε  $f(A) = A_f$ .

*Παρατήρηση* Ο τελεστής  $A_f$  δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα,  $A_{\text{id}} = I_H$ ). Όταν όμως η ακολουθία  $(f(\lambda_n))$  είναι μηδενική, τότε ο  $A_f$  είναι συμπαγής ( $\|\cdot\|$ -όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης).