

Παρατηρήσεις για τους συμπαγείς τελεστές

Πρόταση 1 Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\text{im } A}$ και $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδειξη Δίνουμε μια απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης:

(i) Ο $\text{im } A$, άρα και ο $\overline{\text{im } A}$, είναι διαχωρίσιμος:

Αφού ο $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής, το σύνολο $F := A(\text{ball } H) \subseteq K$ είναι ολικά φραγμένο. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $Y_n \subseteq F$ ώστε το F να καλύπτεται από μπάλες με ακτίνα $1/n$ και κέντρα από το Y_n . Το σύνολο $Y := \{my : m \in \mathbb{N}, y \in \cup_n Y_n\}$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του $\text{im } A$, και είναι πυκνό: πράγματι, αν $\epsilon > 0$ και $x \in H$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A(\frac{x}{m}) \in A(\text{ball } H)$ (πάρτε π.χ. $m \geq \|x\|$), οπότε επιλέγοντας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{m}{n} < \epsilon$ έχουμε $\|A(\frac{x}{m}) - y\| < \frac{1}{n}$ για κάποιο $y \in Y_n$, δηλαδή $\|A(x) - my\| < \frac{m}{n} < \epsilon$.

(ii) Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος:

Θυμίζουμε ότι $(\ker A)^\perp = (\ker A^*A)^\perp = \overline{\text{im}(A^*A)}$ και ότι ο A^*A είναι συμπαγής, άρα ο $\overline{\text{im}(A^*A)}$ είναι διαχωρίσιμος από το (i). □

Πρόταση 2 Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$ τότε

$$T \in \mathcal{K}(H, K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K, H).$$

Απόδειξη Αν ο T είναι συμπαγής, τότε ο T^*T είναι συμπαγής γιατί ο T^* είναι φραγμένος. Έστω, αντίστροφα, ότι ο T^*T είναι συμπαγής. Αν $\{x_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία, τότε η $\{T^*Tx_n\}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $\{T^*Ty_n\}$. Αλλά

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty_m\|_K^2 &= \langle T(y_n - y_m), T(y_n - y_m) \rangle_K = \langle T^*T(y_n - y_m), y_n - y_m \rangle_H \\ &\leq \|T^*T(y_n - y_m)\| \|y_n - y_m\| \leq \|T^*T(y_n - y_m)\| (\|y_n\| + \|y_m\|) \\ &\leq 2M \|T^*Ty_n - T^*Ty_m\|_H \end{aligned}$$

όπου $M = \sup \|x_n\| < +\infty$. Επομένως η $\{Ty_n\}$ είναι βασική, άρα συγκλίνει. Συνεπώς ο T είναι συμπαγής.

Αν ο T^* είναι συμπαγής, τότε ο T^*T είναι συμπαγής επειδή ο T είναι φραγμένος. Όπως μόλις δείξαμε, έπεται ότι ο T είναι συμπαγής.

Αν αντίστροφα ο T είναι συμπαγής, τότε, θέτοντας $S = T^*$, έχουμε ότι ο $S^* = T^{**} = T$ είναι συμπαγής. Επομένως, όπως μόλις δείξαμε, ο $S = T^*$ είναι συμπαγής! □

Πρόταση 3 Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H , η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι συμπαγής. Αν $\{x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία του H , τότε, επειδή ο $T^*T \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής, έχουμε $\langle T^*Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ και συνεπώς

$$\|Tx_n\|_K^2 = \langle Tx_n, Tx_n \rangle = \langle T^*Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$$

άρα η (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

Για το αντίστροφο, έστω $\{x_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία του H . Από την υπόθεση έχουμε ότι το όριο $y := \lim_n Tx_n$ υπάρχει στον K . Θα δείξουμε πρώτα ότι αναγκαστικά $y = 0$.

Πράγματι, για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\langle y, z \rangle = \lim_n \langle Tx_n, z \rangle = \lim_n \langle x_n, T^*z \rangle.$$

Όμως, $\sum_n |\langle x_n, T^*z \rangle|^2 \leq \|T^*z\|^2$ (ανισότητα Bessel) και συνεπώς η ακολουθία $\{\langle x_n, T^*z \rangle\}$ είναι μη-δενική, άρα $\langle y, z \rangle = \lim_n \langle x_n, T^*z \rangle = 0$ και αφού $\langle y, z \rangle = 0$ για κάθε $z \in K$, έπεται ότι $y = 0$.

Έχουμε λοιπόν $\|Tx_n\|_K \rightarrow 0$. Επομένως $\|T^*Tx_n\|_H \rightarrow 0$, άρα $|\langle (T^*T)x_n, x_n \rangle_H| \leq \|T^*Tx_n\|_H$, άρα $\langle T^*Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$ και συνεπώς, όπως έχουμε δείξει, ο $T^*T \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής. Από την Πρόταση 2 έπεται ότι ο $T \in \mathcal{B}(H, K)$ είναι συμπαγής. \square

Παρατηρούμε ότι τα προηγούμενα επιχειρήματα στηρίχθηκαν στο γεγονός ότι, αν μια ακολουθία (y_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα σ' ένα y , τότε συγκλίνει «ασθενώς», δηλαδή $\langle y_n, z \rangle \rightarrow \langle y, z \rangle$ για κάθε z . Δεν ισχύει βέβαια το αντίστροφο (σε απειροδιάστατους χώρους): για παράδειγμα, μια ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει ασθενώς στο 0 (ανισότητα Bessel), αλλά όχι ως προς τη νόρμα του χώρου, αφού $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1 Μια ακολουθία (u_n) σε έναν χώρο Banach E συγκλίνει ασθενώς σε ένα $u \in E$ αν για κάθε $\phi \in E^*$ ισχύει $\lim_n \phi(u_n) = \phi(u)$.

Πρόταση 4 Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο T είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία (v_n) του H ισχύει ότι $\|Tv_n\|_K \rightarrow 0$.
- (iii) Για κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία (u_n) του H , η ακολουθία (Tu_n) είναι $\|\cdot\|_K$ -συγκλίνουσα.

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα

Λήμμα 1 Αν μια ακολουθία (u_n) του H είναι ασθενώς φραγμένη, τότε είναι $\|\cdot\|_H$ -φραγμένη.

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε μια συνεχή γραμμική μορφή

$$u_n^* : H \rightarrow \mathbb{C} : x \mapsto \langle x, u_n \rangle.$$

Από την υπόθεση, για κάθε $x \in H$ η ακολουθία $\{u_n^*(x)\}$ είναι φραγμένη (στο \mathbb{C}). Δηλαδή η ακολουθία των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $\{u_n^*\}$ είναι κατά σημείο φραγμένη. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος¹ έπεται ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένη, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά M ώστε $\|u_n^*\| \leq M$ για κάθε n .

Όμως $\|u_n^*\| = \sup\{|\langle x, u_n \rangle| : x \in \text{ball}(H)\} = \|u_n\|$. \square

Απόδειξη της Πρότασης 4 (i) \Rightarrow (ii) Έστω ότι η ακολουθία (v_n) συγκλίνει ασθενώς στο 0. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η ακολουθία $(\|Tv_n\|)$ δεν συγκλίνει στο 0. Τότε θα υπάρχει μια υπακολουθία της, έστω

¹Δείτε τις σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης ή το <https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH495/pubn.pdf>

(Tz_n) , και ένα $\delta > 0$ ώστε $\|Tz_n\|_K \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (z_n) συγκλίνει ασθενώς, οπότε είναι ασθενώς φραγμένη, άρα (από το Λήμμα) $\|\cdot\|_H$ -φραγμένη. Αφού ο T είναι συμπαγής, η (Tz_n) έχει μια υπακολουθία, έστω (Tw_n) , που είναι $\|\cdot\|_K$ -συγκλίνουσα.

Έστω $y = \lim_n Tw_n$. Για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\langle y, z \rangle = \lim_n \langle Tw_n, z \rangle = \lim_n \langle w_n, T^*z \rangle = 0$$

γιατί η (w_n) είναι υπακολουθία της (v_n) και άρα ασθενώς μηδενική. Έπεται ότι $y = 0$, ενώ $\|y\| = \lim_n \|Tw_n\| \geq \delta$: άτοπο.

(ii) \Rightarrow (iii) Έστω ότι η ακολουθία (u_n) συγκλίνει ασθενώς στο $u \in H$.

Τότε η ακολουθία $(v_n) = (u_n - u)$ είναι ασθενώς μηδενική, άρα από την υπόθεση έχουμε ότι $\|Tv_n\|_K \rightarrow 0$, δηλαδή $\|Tu_n - Tu\|_K \rightarrow 0$. Δηλαδή η (Tu_n) είναι $\|\cdot\|_K$ -συγκλίνουσα (στο Tu).

(iii) \Rightarrow (i) Έστω (x_n) μια ορθοκανονική ακολουθία. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, η (x_n) είναι ασθενώς μηδενική, οπότε από την υπόθεσή μας έχουμε $\|Tx_n\|_K \rightarrow 0$. Από την Πρόταση 3, έπεται ότι ο T είναι συμπαγής. \square