Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Εισαγωγή Γραμμική Άλγεβρα:

Πρόταση 1. *Έστω $K \in M_n(\mathbb{C})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα:*
ή *η εξίσωση*

$$\lambda x - Kx = y$$

έχει μοναδική λύση $x \in \mathbb{C}^n$ για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$, ή αλλιώς *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση*

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει μη μηδενικές λύσεις.

Πράγματι, αν δεν ισχύει το δεύτερο ενδεχόμενο, αν δηλαδή το λ δεν είναι ιδιοτιμή του K, τότε ο $\lambda I - K$ είναι 1-1, και συνεπώς επί (!), άρα για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$ βρίσκουμε $x = (\lambda I - K)^{-1}(y)$.

Θεώρημα 2. *Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο* [1] *Hilbert H και $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,*
ή *η εξίσωση*

$$\lambda x - Kx = y \tag{1}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$, ή αλλιώς *η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση*

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι η (1) έχει, για $y = 0$, το πολύ μια λύση (οπότε αποκλείεται το δεύτερο ενδεχόμενο), τότε από την συμπάγεια του τελεστή K συμπεραίνουμε την ύπαρξη λύσης της (1) για κάθε $y \in H$, και μάλιστα ακριβώς μιας.

Το γεγονός ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και σε απειροδιάστατους χώρους είναι μία από τις βασικές αιτίες που οδήγησε στην μελέτη των συμπαγών τελεστών.

Παρατηρήσεις 3. *(α) Η υπόθεση «K συμπαγής» δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα ο τελεστής*

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1} \ (n \in \mathbb{Z})$$

δεν έχει καμμιά ιδιοτιμή, αλλά, όταν $\lambda \in \mathbb{T}$, ο $\lambda I - U$ δεν έχει αντίστροφο (Άσκηση!)

(β) Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα για $\lambda = 0$. Για παράδειγμα ο τελεστής

$$K : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}) : e_n \mapsto \frac{1}{n} e_n \ (n \in \mathbb{N})$$

είναι συμπαγής και 1-1 (το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του) αλλά (ο $0I - K$) δεν είναι αντιστρέψιμος.

[1] Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Απόδειξη του Θεωρήματος Εφόσον $\lambda \neq 0$, αντικαθιστώντας τον K με τον K/λ, μπορούμε στη συνέχεια να υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$.

Έστω ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Δηλαδή, ισοδύναμα, έστω ότι ο πυρήνας $M_1 = \ker(I - K)$ δεν είναι τετριμμένος. Τότε είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι ο K περιορισμένος στον M_1 είναι ο ταυτοτικός τελεστής, και είναι συμπαγής.

Έστω αντίθετα ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει μόνον τη μηδενική λύση. Δηλαδή, ο $I - K$ είναι 1-1. Έπεται από το Λήμμα 2 ότι ο $I - K$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε για κάθε $y \in H$ η εξίσωση $x - Kx = y$ έχει την μοναδική λύση $x = (I - K)^{-1}y$. □

Λήμμα 1. *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} T^n$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \to 0$,

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \tag{2}$$

Όμως η ακολουθία $\{S_m\}$ συγκλίνει. Πράγματι, αν $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Επειδή $\|T\| < 1$, έπεται ότι η $\{S_m\}$ είναι βασική ακολουθία στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$, επομένως συγκλίνει σε έναν $S \in \mathcal{B}(H)$. Από την (2) έχουμε ότι $(I - T)S = S(I - T) = I$, άρα $S = (I - T)^{-1}$. □

Λήμμα 2. *Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $I - K$ είναι 1-1. Υπάρχει ένας τελεστής $F \in \mathcal{B}(H)$ *πεπερασμένης τάξης* ώστε $\|K - F\| < 1$. Αν $K_1 = K - F \in \mathcal{K}(H)$, τότε, από το Λήμμα 1, ο τελεστής $I - K_1$ είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $G = F(I - K_1)^{-1}$.

Παρατηρούμε ότι ο $I - G$ είναι 1-1.

Πράγματι, αυτό είναι φανερό από την υπόθεση ότι ο $I - K$ είναι 1-1, αν παρατηρήσει κανείς ότι

$$(I - G)(I - K_1) = (I - K_1) - G(I - K_1) = I - K_1 - F = I - K$$
$$\text{ισοδύναμα} \quad I - G = (I - K)(I - K_1)^{-1}.$$

Όμως ο χώρος $H_o := \operatorname{im} G = \operatorname{im} F$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Θέτουμε $T = (I-G)|_{H_o}$. Ο T απεικονίζει τον H_o στον H_o (γιατί αν $x \in H_o$ τότε $Tx = x - Gx \in H_o$) και είναι 1-1. Επομένως, αφού $\dim H_o < \infty$, ο T απεικονίζει τον H_o επί του H_o. Δηλαδή, για κάθε $v \in H_o$ υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = v$.

Έπεται τώρα ότι $(I - G)(H) = H$.

Πράγματι, για κάθε $y \in H$, εφόσον $Gy \in H_o$, υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = Gy$. Θέτοντας τώρα $x = y + u$ έχουμε

$$(I - G)x = (y - Gy) + (u - Gu) = (y - Gy) + Gy = y.$$

Από τη σχέση $I - K = (I - G)(I - K_1)$

προκύπτει τώρα ότι και ο $I - K$ είναι επί του H.

Κατά συνέπεια, ορίζεται καλά η γραμμική απεικόνιση

$$Y = (I - K)^{-1} : H \to H$$

και *μένει να δειχθεί ότι είναι φραγμένη.* [2]

Έστω ότι δεν είναι. Υπάρχει τότε στον H μια ακολουθία (x_n) από μοναδιαία διανύσματα ώστε $\|Yx_n\| \geq n$ για κάθε n.

Θέτουμε $y_n = \dfrac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$. Αφού ο K είναι συμπαγής και η (y_n) είναι φραγμένη, θα υπάρχει μια υπακολουθία (y_{k_n}) ώστε η (Ky_{k_n}) να συγκλίνει, έστω στο z. Όμως

$$\|(I - K)y_{k_n}\| = \left\|(I - K)\frac{Yx_{k_n}}{\|Yx_{k_n}\|}\right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Yx_{k_n}\|} \leq \frac{1}{k_n}$$

άρα $y_{k_n} - Ky_{k_n} = (I - K)y_{k_n} \to 0$. Εφόσον $Ky_{k_n} \to z$, έχουμε $y_{k_n} \to z$ (άρα $\|z\| = 1$). Από τη συνέχεια του K έπεται τώρα ότι $Ky_{k_n} \to Kz$, επομένως $Kz = z$ από τη μοναδικότητα του ορίου, δηλ. $(I - K)z = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο $(I - K)$ είναι 1-1. $\square$

[2] Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε όμως μια ανεξάρτητη και στοιχειώδη απόδειξη.