Μερικές ισομετρίες και προβολές

Ορισμός 1 *Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται **μερική ισομετρία** αν ο $V|_E$ είναι ισομετρία, όπου $E := (\ker V)^\perp$. Ο E ονομάζεται ο **αρχικός χώρος** της V.*

Παρατήρησε ότι αν $F = V(\mathcal{H}_1)$, τότε $F = V(E)$ άρα ο F είναι κλειστός υπόχωρος, γιατί ο E είναι πλήρης και ο $V|_E$ είναι ισομετρικός. Ο F ονομάζεται ο **τελικός χώρος** της V. Παρατήρησε επίσης ότι κάθε ορθή προβολή P είναι μερική ισομετρία με αρχικό και τελικό χώρο $P(\mathcal{H})$.

Πρόταση 1 *Αν V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E και τελικό χώρο F, τότε η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E, η V^*V είναι η προβολή στον E (η* **αρχική προβολή** *του V) και η VV^* είναι η προβολή στον F (η* **τελική προβολή** *του V).*

Αντίστροφα, αν $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ και ο τελεστής V^*V είναι προβολή, τότε ο VV^* είναι επίσης προβολή και η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $V^*V(\mathcal{H}_1)$ και τελικό χώρο $VV^*(\mathcal{H}_2)$.

Απόδειξη (α) Έστω ότι η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E. Δείχνουμε ότι $V^*V = P_E$: Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$Vx = VP_Ex + VP_E^\perp x = VP_Ex$$

γιατί ο V μηδενίζεται στον $E^\perp$. Άρα $V = VP_E$. Επομένως, αν $x, y \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle Vx, Vy\rangle = \langle VP_Ex, VP_Ey\rangle = \langle P_Ex, P_Ey\rangle$$

γιατί η V είναι ισομετρία στον E. Άρα

$$\langle V^*Vx, y\rangle = \langle P_Ex, P_Ey\rangle = \langle P_Ex, y\rangle$$

για κάθε x, y, πράγμα που δείχνει ότι $V^*V = P_E$.

Παρεμπιπτόντως, αφού $V = VP_E$, έχουμε και τη σχέση $V = VV^*V$.

Έστω ότι, αντίστροφα, ο τελεστής $P = V^*V$ είναι προβολή. Θα δείξω ότι ο V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $E = P(\mathcal{H}_1)$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = \|Px\|^2.$$

Έπεται ότι: αν $x \in P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = \|x\|$ και αν $x \perp P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = 0$. Δηλαδή ο V είναι ισομετρικός στον $P(\mathcal{H}_1)$ και μηδενίζεται στον $P(\mathcal{H}_1)^\perp$.

(β) Έστω τώρα ότι η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E. Τότε, όπως δείξαμε, ισχύει η ισότητα

$$V = VV^*V.$$

Έπεται ότι $(VV^*)(VV^*) = (VV^*V)V^* = VV^*$. Συνεπώς ο τελεστής $Q := VV^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ είναι προβολή, αφού $Q = Q^* = Q^2$. Ισχυρίζομαι ότι ο τελικός χώρος $F = \operatorname{im} V$ της V είναι ο $\operatorname{im} Q$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} V = (VV^*)V = QV \text{ άρα } &\operatorname{im} V \subseteq \operatorname{im} Q, \text{ αλλά και} \\ Q(\mathcal{H}_2) = VV^*(\mathcal{H}_2) \text{ άρα } &\operatorname{im} Q \subseteq \operatorname{im} V\,. \end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι $Q = P_F$.

Τέλος, επειδή η προβολή $Q = P_F$ ικανοποιεί $Q = (V^*)^*V^*$, εφαρμόζοντας το (α) στον τελεστή $V^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ συμπεραίνουμε ότι είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο $\mathrm{im}(V^*(V^*)^*) = \mathrm{im}(V^*V) = E$.

Άλλη απόδειξη του (β) Δείχνουμε ότι η $V^*|_F$ είναι ισομετρία: για κάθε $y = Vx \in F$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|V^*y\|^2 &= \|V^*(Vx)\|^2 = \langle V^*Vx, V^*Vx\rangle = \langle (V^*V)^2x, x\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle \\ &= \langle Vx, Vx\rangle = \|Vx\|^2 = \|y\|^2\end{aligned}$$

επειδή $(V^*V)^2 = V^*V$, όπως δείξαμε. Άρα, η $V^*|_F$ είναι ισομετρία.

Επίσης, $V^*y = VV^*x \in E$, άρα ο $V^*|_F$ απεικονίζει τον F στον E, μάλιστα τον απεικονίζει *επί* του E γιατί για κάθε $x \in E$ έχουμε $Vx \in F$ και $V^*(Vx) = P_E x = x$.

Μένει να δειχθεί ότι η V^* μηδενίζεται στον $F^\perp$. Πράγματι, αν $z \in F^\perp$, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\langle V^*z, x\rangle = \langle z, Vx\rangle = 0$$

γιατί $Vx \in F$, άρα $V^*z = 0$. Δείξαμε ότι η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F. Εφαρμόζοντας το (α) στην V^*, συμπεραίνουμε ότι η VV^* είναι η ορθή προβολή στον F. $\square$

Παρατήρηση 2 Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η έννοια της μερικής ισομετρίας μπορεί να ορισθεί αλγεβρικά (χωρίς αναφορά δηλαδή στην δράση πάνω σ' έναν χώρο Hilbert) και μάλιστα σε κάθε C*-άλγεβρα $\mathcal{A}$: ένα στοιχείο $V \in \mathcal{A}$ λέγεται *μερική ισομετρία* αν το $V^*V = P$ είναι ορθή προβολή δηλαδή αν $P = P^2 = P^*$. Μάλιστα

Αν $V \in \mathcal{A}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) *Το στοιχείο $P = V^*V$ είναι προβολή.*
(b) $VV^*V = V$.
(c) $V^*VV^* = V^*$.
(d) *Το στοιχείο $Q = VV^*$ είναι προβολή.*

Απόδειξη **(a)⇒(b)** Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα C*, έχουμε

$$\begin{aligned}\|V - VV^*V\|^2 &= \|V - VP\|^2 = \|(V^* - PV^*)(V - VP)\| \\ &= \|V^*V - V^*VP - PV^*V + PV^*VP\| \\ &= \|P - P^2 - P^2 + P^3\| = 0\end{aligned}$$

(b)⇒(a) Το V^*V είναι προφανώς αυτοσυζυγές και

$$(V^*V)^2 = V^*VV^*V = V^*(VV^*V) = V^*V.$$

Οι σχέσεις **(b)** και **(c)** είναι προφανώς ισοδύναμες (η μία είναι συζυγής της άλλης). Τέλος, η ισοδυναμία **(d)⇔(c)** προκύπτει από την **(a)⇔(b)** θεωρώντας το V^* στη θέση του V.

Άσκηση 3 *Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το γινόμενο (: η σύνθεση) δυο μη μηδενικών μερικών ισομετριών να είναι μη μηδενική μερική ισομετρία.*