Σχετικά με τους τελεστές πεπερασμένης τάξης

Συμβολισμός Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση
$$\Theta_{u,v} = uv^* : E \to \mathbb{C} \to F : x \mapsto \langle x, u\rangle \mapsto \langle x, u\rangle v$$
Για παράδειγμα, αν $E = F = \ell^2[n]$, ο τελεστής
$$E_{ij} := e_i e_j^*$$
που απεικονίζει το διάνυσμα e_j στο $\langle e_j, e_j\rangle e_i = e_i$ και τα e_k για $k \neq j$ στο $\langle e_k, e_j\rangle e_i = 0$, έχει $(n \times n)$ πίνακα με την μονάδα στην i-γραμμή και j-στήλη και μηδενικά παντού αλλού.

Γενικότερα, αν οι E και F έχουν ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ ο τελεστής $f_i e_j^*$ στέλνει το e_j στο f_i και τα e_k για $k \neq j$ στο 0.

Πρόταση 1. *Αν οι E και F έχουν ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$, το σύνολο*
$$E = \{f_i e_j^* : i \in [n], j \in [m]\}$$
όπου $f_i e_j^*(x) = \langle x, e_j\rangle f_i$ είναι αλγεβρική βάση του χώρου $\mathcal{B}(E, F) \simeq M_{nm}(\mathbb{K})$.

Απόδειξη. Το σύνολο E παράγει γραμμικά τον $\mathcal{B}(E, F)$:
Για κάθε $A \in \mathcal{B}(E, F)$, θα δείξουμε ότι
$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} f_i e_j^* \tag{*}$$
όπου $a_{i,j} := \langle Ae_j, f_i\rangle$. Πράγματι, για κάθε $x \in E$ έχουμε $x = \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j\rangle e_j$, οπότε
$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j\rangle Ae_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j\rangle \left(\sum_{i=1}^{n} \langle Ae_j, f_i\rangle f_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_j, f_i\rangle \langle x, e_j\rangle f_i \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_j, f_i\rangle f_i e_j^*(x) \\ \text{άρα} \quad A &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_j, f_i\rangle f_i e_j^* . \end{aligned}$$
Αντίστροφα, αν $A = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i e_j^*$ τότε, για κάθε $l \in [m]$ και $k \in [n]$,
$$\langle Ae_l, f_k\rangle = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \langle f_i e_j^*(e_l), f_k\rangle = a_{k,l} .$$

Επομένως, αν $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i e_j^* = 0$ τότε $a_{i,j} = 0$ για κάθε i, j.

Αυτό δείχνει ότι το σύνολο E είναι γραμμικά ανεξάρτητο. □

Η σχέση (*) δείχνει ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(E, F)$ είναι γραμμικός συνδυασμός τελεστών πρώτης τάξης που προέρχονται από ορθοκανονικές βάσεις των χώρων. Το πλήθος όμως των όρων που εμφανίζονται είναι εν γένει nm, το γινόμενο των διαστάσεων.

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να πετύχουμε άθροισμα με πολύ λιγότερους όρους:

Πρόταση 2. *Κάθε $A \in \mathcal{B}(E, F)$ γράφεται, ως προς οποιεσδήποτε ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ των E και F,*

$$A = \sum_{j=1}^{m} v_j e_j^* \quad \text{ή} \quad A = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i^*$$

όπου $v_j \in F$ και $u_i \in E$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in E$ έχουμε $Ax = A\left(\sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, e_j \rangle A e_j$, οπότε

$$Ax = \sum_{j=1}^{m} (Ae_j) e_j^*(x) = \sum_{j=1}^{m} v_j e_j^*(x)$$

όπου $v_j = Ae_j$, και η πρώτη ισότητα αποδείχθηκε.

Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή για τον τελεστή $A^* \in \mathcal{B}(F, E)$, βρίσκουμε ότι θέτοντας $u_i = A^* f_i \in E$, $i \in [n]$, έχουμε $A^* = \sum_{i=1}^{n} u_i f_i^*$ και άρα

$$A = \sum_{i=1}^{n} f_i u_i^* .$$

□

Το ίχνος πίνακα Το ίχνος ενός $m \times m$ πίνακα $[a_{i,j}]$ ορίζεται συνήθως ως το άθροισμα $\sum_{i=1}^{m} a_{i,i}$ των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα. Αν $u = [u_1, \dots, u_m]^t$ και $v = [v_1, \dots, v_m]^t$ είναι δυο διανύσματα του $\ell^2[m]$, ο τελεστής $uv^* \in \mathcal{B}(\ell^2[m])$ έχει πίνακα (ως προς τη συνηθισμένη βάση του $\ell^2[m]$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m] = \begin{bmatrix} u_1\bar{v}_1 & \dots & \dots & u_1\bar{v}_m \\ u_2\bar{v}_1 & \dots & \dots & u_2\bar{v}_m \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ u_m\bar{v}_1 & \vdots & \vdots & u_m\bar{v}_m \end{bmatrix}$$

και το ίχνος του πίνακα είναι $\sum_{i=1}^{m} u_i \bar{v}_i$ που δεν είναι άλλο από το $\langle u, v \rangle$.

Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό:

Το ίχνος τελεστή Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης:
Ορίζουμε μια γραμμική μορφή $\mathrm{Tr_E}$ (το *ίχνος* ενός τελεστή) στον γραμμικό χώρο $\mathcal{B}(E)$, πρώτα για τελεστές πρώτης τάξης, θέτοντας

$$\mathrm{Tr_E}(uv^*) := \langle u, v\rangle, \quad u, v \in E$$

και επεκτείνουμε γραμμικά στον $\mathcal{B}(E)$, που είναι η γραμμική θήκη των τελεστών πρώτης τάξης:

Επειδή, όπως δείξαμε, κάθε $A \in \mathcal{B}(E)$ γράφεται, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E, κατά μοναδικό τρόπο

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} e_i e_j^*$$

όπου $a_{i,j} := \langle Ae_j, e_i\rangle$, έχουμε

$$\mathrm{Tr_E}(A) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\mathrm{Tr_E}(e_i e_j^*) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{i,i}$$

δηλ. το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα $[a_{i,j}]$ ως προς την ορθοκανονική βάση του E που επιλέξαμε.

Ας τονίσουμε ότι το ίχνος του τελεστή A *δεν εξαρτάται* από την ορθοκανονική βάση που επιλέξαμε.

Ιδιότητες του ίχνους

• Η απεικόνιση $\mathrm{Tr_E} : \mathcal{B}(E) \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.
Πράγματι, είναι το άθροισμα των γραμμικών απεικονίσεων $A \mapsto a_{ii} = \langle Ae_i, e_i\rangle$).

• Για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(E)$, έχουμε $\mathrm{Tr_E}(AB) = \mathrm{Tr_E}(BA)$.
Απόδειξη Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) να το δείξουμε όταν $A = uv^*$ και $B = xy^*$. Έχουμε $AB = uv^* \circ xy^* = \langle x, v\rangle uy^*$ και $BA = xy^* \circ uv^* = \langle u, y\rangle xv^*$ άρα

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr_E}(AB) = \langle x, v\rangle \mathrm{Tr_E}(uy^*) = \langle x, v\rangle\langle u, y\rangle \\ \text{και} \quad &\mathrm{Tr_E}(BA) = \langle u, y\rangle \mathrm{Tr_E}(xv^*) = \langle u, y\rangle\langle x, v\rangle\,. \end{aligned}$$

• $\mathrm{Tr_E}(A^*A) = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{i,j}|^2 = \sum_{j=1}^{m} \|Ae_j\|_2^2$.
Συνεπώς $\mathrm{Tr_E}(A^*A) \geq 0$ [1] και $\mathrm{Tr_E}(A^*A) = 0 \iff A^*A = 0 \iff A = 0$.
Απόδειξη Αν $[b_{ij}] = [\sum_k \bar{a}_{ki}a_{kj}]$ είναι ο πίνακας του A^*A, έχουμε

$$\mathrm{Tr_E}(A^*A) = \sum_l b_{ll} = \sum_l \sum_k \bar{a}_{kl}a_{kl} = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2\,.$$

Παρατηρούμε όμως ότι για κάθε j, έχουμε $Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, οπότε $\|Ae_j\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2$, και επομένως $\sum_{j=1}^{m} \|Ae_j\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2 = \mathrm{Tr_E}(A^*A)$.

[1] Θα δούμε αργότερα ότι η ιδιότητα αυτή ισοδυναμεί με την $\mathrm{Tr_E}(X) \geq 0$ για κάθε $X \in \mathcal{B}_+(E)$.

Παρατήρηση Έπεται ειδικότερα ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^m \|Ae_j\|^2$ εξαρτάται μόνον από τον τελεστή A και όχι από την ορθοκανονική βάση που επιλέξαμε.

Το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{B}(E,F)$, όταν $\dim E < \infty$ και $\dim F = \infty$.
Αν $\dim E = m$ και $\dim F = n$ και $A, B \in \mathcal{B}(E,F)$, ο τελεστής B^*A ανήκει στον $\mathcal{B}(E)$. Επομένως ορίζεται το $\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(B^*A)$.

Ορισμός 1. *Αν $A, B \in \mathcal{B}(E,F)$, ορίζουμε*

$$\langle A, B\rangle_{hs} := \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(B^*A)\,.$$

Πρόταση 3. *Το $\langle \cdot, \cdot\rangle_{hs}$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{B}(E,F)$.*

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι η $\langle \cdot, \cdot\rangle_{hs}$ είναι sesquilinear μορφή στον $\mathcal{B}(E,F)$. Ελέγχουμε ότι είναι ερμιτιανή, δηλ ότι

$$\begin{aligned} \langle B, A\rangle_{hs} &= \overline{\langle A, B\rangle}_{hs} \\ \text{ισοδύναμα} \ \ \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(A^*B) &= \overline{\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(B^*A)}\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) να το δείξουμε όταν $A = uv^*$ και $B = xy^*$. Τότε $A^*B = (uv^*)^*(xy^*) = (vu^*)(xy^*) = \langle x, u\rangle vy^*$ και $B^*A = (yx^*)(uv^*) = \langle u, x\rangle yv^*$ άρα

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(A^*B) = \langle x, u\rangle \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(vy^*) = \langle x, u\rangle\langle v, y\rangle \\ \text{και} \quad &\mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(B^*A) = \langle u, x\rangle \mathrm{Tr}_{\mathrm{E}}(yv^*) = \langle u, x\rangle\langle y, v\rangle = \overline{\langle x, u\rangle\langle v, y\rangle}\,. \end{aligned}$$