Πλησιέστερο / Κάθετο διάνυσμα

Πρόταση [Πλησιέστερο διάνυσμα] *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $F \neq \emptyset$* κυρτό και πλήρες *υποσύνολο του E. Αν $x \in E \backslash F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y\| = d(x, F) :=$* $\inf\{\|x - z\| : z \in F\}$.

Απόδειξη Έστω $\delta = d(x, F)$.
Μοναδικότητα Αν $y_1, y_2 \in F$ και $\|y_1 - x\| = \delta = \|y_2 - x\|$, τότε τα $y_1 - x$ και $y_2 - x$ περιέχονται σε έναν (πραγματικό) υπόχωρο M του F με (πραγματική) διάσταση 2 (ένα επίπεδο). Είναι φανερό γεωμετρικά ότι, αν $y_1 \neq y_2$, η απόσταση του διανύσματος $\frac{y_1+y_2}{2} \in F$ από το x θα είναι γνησίως μικρότερη από δ, άτοπο.

Και πραγματικά, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 &= \|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 + \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 \\ &= 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 = 4d^2\end{aligned}$$

οπότε αν $\|y_1 - y_2\| > 0$ τότε $\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\| < \delta$.

(Παρατήρησε ότι η πληρότητα δεν χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη της μοναδικότητας).

Ύπαρξη Υπάρχει μια ακολουθία (y_n) στοιχείων του F ώστε $\delta \leqslant \|y_n - x\| < \delta + \frac{1}{n}$. Αν $n, m \in \mathbb{N}$, τα $y_n - x$ και $y_m - x$ περιέχονται σε ένα (πραγματικό) επίπεδο στον E. Ισχυρίζομαι ότι η ακολουθία (y_n) είναι βασική.

Η γεωμετρική ιδέα είναι η εξής: Αφού τα μήκη των διανυσμάτων $y_n - x$ και $y_m - x$ είναι σχεδόν ίσα όταν τα n, m είναι αρκετά μεγάλα, φαίνεται γεωμετρικά ότι τα y_n και y_m δεν μπορεί να απέχουν πολύ μεταξύ τους: αν η απόσταση τους δεν ήταν μικρή, κάποιο σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει θα απείχε απ' το x λιγότερο από δ.

Η αυστηρή απόδειξη είναι η ακόλουθη: εφαρμόζουμε τον κανόνα του Παραλληλογράμμου στα $y_n - x$ και $y_m - x$ βρίσκουμε

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Επειδή $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in F$ (κυρτότητα του F), έχουμε $\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\| \geqslant \delta$, άρα

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2.$$

Όταν $n \to \infty$ και $m \to \infty$, το δεξιά μέλος της ανισότητας τείνει στο $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$, και επομένως η (y_n) είναι βασική ακολουθία.

Επειδή ο F είναι *πλήρης*, υπάρχει $y \in F$ ώστε $\|y - y_n\| \to 0$. Τέλος, η συνέχεια της νόρμας δείχνει ότι

$$\|y - x\| = \lim \|y_n - x\| = \delta. \quad \square$$

Πρόταση [Κάθετο διάνυσμα] *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, F* πλήρης γραμμικός υπόχωρος *του E. Αν $x \in E \backslash F$, το πλησιέστερο προς το x στοιχείο $y_x \in F$ είναι το μοναδικό $y \in F$ τέτοιο ώστε $x - y \perp F$.*

Ορισμός *Το μοναδικό αυτό στοιχείο του F ονομάζουμε* **(ορθή) προβολή** *του x στον F, και το συμβολίζουμε $P_F(x)$ ή $P(F)x$.*

Απόδειξη Έστω $\delta = d(x, F)$.

Αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε για κάθε $z \in F$ έχουμε

$$\begin{aligned} x - z &= (x - y) + (y - z) \\ \text{άρα (Πυθ.) } \|x - z\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \end{aligned}$$

γιατί $x - y \perp y - z$. Συνεπώς $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$ για κάθε $z \in F$, οπότε $\|x - y\| = \delta$, άρα $y = y_x$ (μοναδικότητα του y_x).

Αντίστροφα, να δείξουμε ότι $x - y_x \perp F$. Έστω $z \in F$, πρέπει να δείξουμε ότι $x - y_x \perp z$. Θεωρούμε τον γραμμικό υπόχωρο $F_z = \text{span}\{z, y_x\} \subseteq F$. Αφού $\dim F_z < \infty$, υπάρχει[1] ένα διάνυσμα $w_x \in F$ ώστε $x - w_x \perp F_z$. Τότε όμως,

$$x - y_x = x - w_x + w - y_x \Rightarrow \|x - y_x\|^2 = \|x - w_x\|^2 + \|w_x - y_z\|^2 \geqslant \|x - w_x\|^2$$

και συνεπώς $\delta^2 = \|x - y_x\|^2 \geqslant \|x - w_x\|^2 \geqslant \delta^2$ άρα $\|x - w_x\| = \delta$ οπότε $w_x = y_x$ απ' τη μοναδικότητα του y_x. Δηλαδή $x - y_x = x - w_x \perp F_z$ και άρα $x - y_x \perp z$. $\square$

[1] $w_x = P_{F_z}(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$ όπου $\{e_1, e_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του F_z