Σχόλια για τις Ασκήσεις IV

Γενικές παρατηρήσεις Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) στους χώρους Hilbert K και H αντίστοιχα, και μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(\lambda(n))$, έχουμε δείξει ότι ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } \; x \in H\,. \tag{*}$$

Έχουμε τότε $(x_i y_i^*)^* = y_i x_i^*$ και συνεπώς

$$Ay_k = \lambda(k) x_k \quad \text{και} \quad A^* x_k = \overline{\lambda(k)} y_k\,,$$

οπότε

$$(A^*A)y_k = |\lambda(k)|^2 y_k \quad \text{και} \quad (AA^*)x_k = |\lambda(k)|^2 x_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση που $H = K$ και *ο A είναι διαγωνοποιήσιμος* ως προς μια ορθοκανονική βάση $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, γράφοντας τον A στην (*) με $x_k = y_k$, προκύπτει από την τελευταία σχέση ότι *ο A είναι φυσιολογικός.*

Ας σημειώσουμε όμως ότι ένας τελεστής της μορφής (*) δεν είναι πάντα διαγωνοποιήσιμος, ακόμα κι αν είναι φυσιολογικός. Ένα παράδειγμα είναι ο bilateral shift

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ο οποίος μπορεί να γραφτεί

$$U(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (e_{i+1} e_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } \; x \in \ell^2(\mathbb{Z})\,.$$

Ο U είναι unitary, άρα φυσιολογικός, αλλά δεν έχει καμμιά ιδιοτιμή, όπως έχουμε δείξει, συνεπώς δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Άσκηση 1. *Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιήσιμος τελεστής (δηλαδή, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του T). Δείξτε ότι κάθε ιδιόχωρος $M_\lambda(T)$ του T περιέχεται στον ιδιόχωρο $M_{|\lambda|^2}(T^*T)$ του T^*T και ότι $\sigma_p(T^*T) = \{|\lambda|^2 : \lambda \in \sigma_p(T)\}$.*

Απόδειξη. Αν $\lambda \in \sigma_p(T)$ και $x \in M_\lambda(T)$ έχουμε $Tx = \lambda x$ και $T^*x = \bar{\lambda} x$ (αφού T φυσιολογικός) άρα $T^*Tx = \bar{\lambda}\lambda x$, συνεπώς $|\lambda|^2 \in \sigma_p(T^*T)$ και $x \in M_{|\lambda|^2}(T^*T)$.

Αντίστροφα έστω $\mu \in \sigma_p(T^*T)$. Αν $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H ώστε $Tx_n = \lambda_n x_n$, έχουμε $T^*Tx_n = T^*(\lambda_n x_n) = |\lambda_n|^2 x_n$. Συνεπώς ένα μη μηδενικό $x \in H$ ανήκει στον $M_\mu(T^*T)$ αν και μόνον αν ικανοποιεί

$$0 = T^*Tx - \mu x = \sum_n \langle x, x_n \rangle (T^*Tx_n - \mu x_n) = \sum_n \langle x, x_n \rangle (|\lambda_n|^2 - \mu) x_n\,.$$

Συνεπώς

$$T^*Tx = \mu x \quad \iff \quad \langle x, x_n \rangle (|\lambda_n|^2 - \mu) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

και επειδή το x είναι μη μηδενικό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\langle x, x_n \rangle \neq 0$, οπότε $|\lambda_n|^2 = \mu$. Δηλαδή $\mu \in \{|\lambda|^2 : \lambda \in \sigma_p(T)\}$. $\square$

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δύο και παράγουν τον H.*

Απόδειξη. Βεβαίως τα a_n είναι ιδιοτιμές του A. Αντίστροφα, έστω $\lambda \in \sigma_p(A)$ και $x \neq 0$ ώστε $Ax = \lambda x$. Έχουμε

$$0 = Ax - \lambda x = \sum_n \langle x, e_n\rangle (Ax_n - \lambda x_n) = \sum_n \langle x, e_n\rangle (a_n - \lambda) e_n \,.$$

και επειδή το x είναι μη μηδενικό, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\langle x, e_n\rangle \neq 0$, οπότε $a_n = \lambda$.

Δείξαμε ότι $\sigma_p(A) = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Επίσης, για κάθε λ, αν θέσουμε $\mathbb{N}_\lambda := \{n \in \mathbb{N} : a_n = \lambda\}$ δείξαμε ότι το x ανήκει στον $M_\lambda(A)$ αν και μόνον αν $\langle x, e_n\rangle = 0$ για κάθε $n \notin \mathbb{N}_\lambda$, ισοδύναμα (αφού $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_\lambda} \langle x, e_n\rangle e_n + \sum\limits_{n\notin\mathbb{N}_\lambda} \langle x, e_n\rangle e_n$) αν και μόνον αν

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}_\lambda} \langle x, e_n\rangle e_n$$

Δηλαδή ο ιδιόχωρος $M_\lambda(A)$ παράγεται από τα $\{e_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\}$:

$$M_\mu(A) = \overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\} = \overline{\mathrm{span}}\{e_n : a_n = \lambda\}.$$

Αφού η $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια, αν $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$ είναι διαφορετικά, έπεται ότι οι ιδιόχωροι $M_\lambda(A)$ και $M_\mu(A)$ (παράγονται από κάθετες οικογένειες διανυσμάτων, άρα) είναι κάθετοι, και επειδή η κλειστή γραμμική θήκη όλων των ιδιοχώρων περιέχει ορθοκανονική βάση, είναι ίση με τον H. $\square$

Άσκηση 3. *Δίδονται ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) στους χώρους Hilbert K και H αντίστοιχα, και μια φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $(\lambda(n))$. Έχουμε δείξει ότι ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με*

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \textit{για κάθε } \; x \in H \,.$$

1. Δείξτε ότι η νόρμα του τελεστή A ισούται με $\sup_k |\lambda(k)|$.

2. Επίσης, δείξτε ότι η σειρά τελεστών $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)$ συγκλίνει στη νόρμα του χώρου $\mathcal{B}(H, K)$ (δηλαδή στη νόρμα τελεστή) αν και μόνον αν η $(\lambda(n))$ είναι μηδενική ακολουθία.

3. Αν $H = K$ και ο A είναι φυσιολογικός, να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $\lambda(i)$, x_i, y_i και των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A.

4. Αν $H = K$ και ο A είναι φυσιολογικός και γράφεται επίσης $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)(u_i v_i^*)$, όπου οι (u_n) και (v_n) είναι επίσης ορθοκανονικές ακολουθίες και $(\lambda(i)), (\mu(i))$ είναι φθίνουσες μηδενικές ακολουθίες θετικών αριθμών, δείξτε ότι $(\lambda(n)) = (\mu(n))$. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum_n \lambda(n)$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται *τελεστής ίχνους (trace class operator)* ή καμιά φορά *πυρηνικός τελεστής*.

Απόδειξη. (1) Για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2 &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)\langle x, y_i\rangle x_i\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda(i)\langle x, y_i\rangle|^2 \quad (\{x_i\} \text{ ορθ/κά}) \\ &\le \sup_i \lambda(i)^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, y_i\rangle|^2 \\ &\le \sup_i \lambda(i)^2 \|x\|^2 \quad (\{y_i\} \text{ ορθ/κά})\,.\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε $\|A\| \le \sup_i \lambda(i)$, και επειδή $\|A\| \ge \|Ay_k\| = \|\lambda(k)x_k\| = \lambda(k)$ για κάθε k (δες τις παρατηρήσεις στην αρχή) έχουμε $\|A\| = \sup_i \lambda(i)$.

(2) Όπως φαίνεται απο την απόδειξη του *(1)*, μπορούμε (αναδιατάσσοντας εν ανάγκη) να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(\lambda(i))$ είναι μη αύξουσα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n := \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda(i)(x_i y_i^*)$.

Εφαρμόζοντας το *(α)* στον τελεστή $A - A_n$, έχουμε

$$\|A - A_n\| = \left\|\sum_{i=n}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)\right\| = \sup\{\lambda(i) : i \ge n\} = \lambda(n)\,.$$

Επομένως $\|A - A_n\| \to 0 \iff \lambda(n) \to 0\,.$

(3) Από τις παρατηρήσεις στην αρχή, έχουμε

$$(A^*A)y_k = |\lambda(k)|^2 y_k \quad \text{και} \quad (AA^*)x_k = |\lambda(k)|^2 x_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε οι τελεστές A^*A και AA^* είναι διαγωνοποιήσιμοι. Από την Άσκηση (2) ξέρουμε ότι για κάθε $\mu \in \sigma_p(A^*A)$ ο ιδιόχωρος $M_\mu(A^*A)$ είναι

$$M_\mu(A^*A) = \overline{\text{span}}\{y_k : \lambda(k)^2 = \mu\} = \overline{\text{span}}\{y_k : k \in \mathbb{N}_\mu\}.$$

(όπου γράφουμε $\mathbb{N}_\mu := \{i \in \mathbb{N} : \lambda(i)^2 = \mu\} = \{i \in \mathbb{N} : \lambda(i) = \sqrt{\mu}\}$, εφόσον $\lambda(k) \ge 0$). Ομοίως

$$M_\mu(AA^*) = \overline{\text{span}}\{x_k : k \in \mathbb{N}_\mu\}.$$

Αν λοιπόν επιπλέον ισχύει ότι ο A είναι φυσιολογικός, τότε $A^*A = AA^*$, οπότε οι ιδιόχωροι $M_\mu(A^*A)$ και $M_\mu(AA^*)$ ταυτίζονται. Γράφουμε $M_\mu := M_\mu(A^*A)$. Αφού οι οικογένειες $\{y_k : k \in \mathbb{N}_\mu\}$ και $\{x_k : k \in \mathbb{N}_\mu\}$ είναι ορθοκανονικές βάσεις του ίδιου χώρου, η απεικόνιση $y_k \to x_k\,(k \in \mathbb{N}_\mu)$ επεκτείνεται σε unitary τελεστή $U_\mu \in \mathcal{B}(M_\mu)$. Όπως έχουμε δείξει ο A και ο A^* αφήνουν τον M_μ αναλλοίωτο (διότι μετατίθενται με τον A^*A). Επομένως, αν θέσουμε $A_\mu := A|_{M_\mu}$, ο τελεστής $A_\mu \in \mathcal{B}(M_\mu)$ (είναι φυσιολογικός και) ικανοποιεί

$$A_\mu(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}_\mu} \lambda(i)\langle x, y_i\rangle x_i \quad \text{για κάθε } \; x \in M_\mu\,.$$

Δηλαδή (αφού $\lambda(i) = \sqrt{\mu}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}_\mu$)

$$A_\mu(x) = \sqrt{\mu} \sum_{i \in \mathbb{N}_\mu} \langle x, y_i\rangle x_i = \sqrt{\mu}\, U_\mu x\,.$$

Εφόσον ο A^*A είναι διαγωνοποιήσιμος, οι ιδιόχωροί του $\{M_\mu : \mu \in \sigma_p(A^*A)\}$ είναι κάθετοι ανα δύο και παράγουν το χώρο. Ο τελεστής A είναι «μπλοκ διαγώνιος» ως προς αυτή τη διάσπαση: πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$Ax = \sum_{\mu \in \sigma_p(A^*A)} A_\mu x = \sum_{\mu \in \sigma_p(A^*A)} \sqrt{\mu}\, U_\mu x\,.$$

Στη γενική περίπτωση δεν μπορεί κανείς να πει τίποτε περισσότερο: οι τελεστές U_μ μπορεί να είναι οποιοιδήποτε unitary τελεστές (δες τις παρατηρήσεις στην αρχή).

Ας υποθέσουμε λοιπόν *επιπλέον ότι η ακολουθία* $(\lambda(n))$ *είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική,*[1] οπότε ο A^*A είναι συμπαγής (όριο ως προς τη νόρμα τελεστή των τελεστών πεπερασμένης τάξης $\sum\limits_{i<n} \lambda(i) y_i y_i^*$), άρα και ο A είναι συμπαγής.

Τότε για κάθε $\mu \in \sigma_p(A^*A)$ υπάρχει ακριβώς ένα $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(k) = \sqrt{\mu}$, δηλαδή $\sigma_p(A^*A) = \{\lambda(k)^2 : k \in \mathbb{N}\}$. Κάθε ιδιόχωρος $M_{\lambda(k)^2}$ του A^*A (εκτός ενδεχομένως από τον πυρήνα του M_0) είναι μονοδιάστατος, και παράγεται απ' το διάνυσμα y_k ή απ' το x_k. Ο τελεστής $U_{\lambda(k)^2} : y_k \to x_k$ είναι μονοδιάστατος: $x_k = c_k y_k$ όπου $c_k \in \mathbb{C}$, μάλιστα $|c_k| = 1$ αφού $\|x_k\| = 1 = \|y_k\|$. Έχουμε λοιπόν, για κάθε $x \in H$,

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda(i)(y_i y_i^*)(x)$$

οπότε ο A διαγωνοποιείται από την ορθοκανονική βάση $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$, και οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του είναι $\{c_i\lambda(i) : i \in \mathbb{N}\}$ με απόλυτες τιμές $\{\lambda(i) : i \in \mathbb{N}\}$ (μάλιστα η σειρά $\sum_i c_i \lambda(i)(y_i y_i^*)$ συγκλίνει στον A ως προς τη νόρμα τελεστή, αφού $c_i \lambda(i) \to 0$).

(4) Γράφουμε τις μη μηδενικές ιδιοτιμές του A^*A κατά φθίνουσα διάταξη χωρίς επαναλήψεις

$$\sigma_p(A^*A) \backslash \{0\} = \{a_1 > a_2 > \dots\}\,.$$

Από τη σχέση $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)$, άρα $A^*A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)^2 (y_i y_i^*)$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ο ιδιόχωρος $M_{a_m}(A^*A)$ γράφεται

$$M_{a_m}(A^*A) = \overline{\mathrm{span}}\{y_k : \lambda(k)^2 = a_m\}\,.$$

Επίσης όμως, από τη σχέση $A^*A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)^2 (v_i v_i^*)$, ο ίδιος ιδιόχωρος γράφεται

$$M_{a_m}(A^*A) = \overline{\mathrm{span}}\{v_k : \mu(k)^2 = a_m\}\,.$$

Συνεπώς $\lambda(k) = \sqrt{a}_m = \mu(k)^2$, οπότε τα *σύνολα* $\{\lambda(k) : k \in \mathbb{N}\}$ και $\{\mu(k) : k \in \mathbb{N}\}$ ταυτίζονται. Ταυτίζονται όμως και οι επαναλήψεις (η τιμή $\sqrt{a}_m$ επαναλαμβάνεται και στις δυο ακολουθίες τόσες φορές όση η (πεπερασμένη) διάσταση του ιδιόχωρου $M_{a_m}(A^*A)$): Αν γράψουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}_1 &= \{k \in \mathbb{N} : \lambda(k)^2 = a_1\} = \{1, 2, \dots, n_1\} \\
\mathbb{N}_2 &= \{k \in \mathbb{N} : \lambda(k)^2 = a_2\} = \{n_1 + 1, \dots, n_2\} \\
&\vdots \\
\mathbb{N}_{m+1} &= \{k \in \mathbb{N} : \lambda(k)^2 = a_m\} = \{n_m + 1, \dots, n_{m+1}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

[1] Άσκηση 4.9 στο «Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών»

τότε έχουμε $\lambda_{n_m+1} = \cdots = \lambda_{n_{m+1}} = a_m = \mu_{n_m+1} = \cdots = \mu_{n_{m+1}}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, επομένως οι ακολουθίες $(\lambda(n))$ και $(\mu(n))$ ταυτίζονται.

Σχόλιο Ένας άλλος τρόπος να δείξει κανείς ότι το $\sum_n \lambda(n)$ δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση είναι ο ακόλουθος:

Θέτουμε $B := |A|^{1/2}$, οπότε, επειδή $|A|^2 y_k = \lambda(k)^2 y_k$ έχουμε $\|By_k\|^2 = \langle B^*By_k, y_k\rangle = \langle |A|y_k, y_k\rangle = \lambda(k)$. Ομοίως από την $|A|^2 v_k = \mu(k)^2 v_k$ έχουμε $\|Bv_k\|^2 = \mu(k)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Bv_m\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|By_n\|^2 .$$

Παρατηρούμε ότι οι ακολουθίες $\{y_n\}$ και $\{v_m\}$ παράγουν τον ίδιο κλειστό υπόχωρο, έστω H_0, του H. Πράγματι, από την ισότητα

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)\langle x, y_i\rangle x_i = Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)\langle x, v_i\rangle u_i$$

συμπεραίνουμε ότι ένα $x \in H$ ικανοποιεί $\langle x, y_i\rangle = 0$ για κάθε i αν και μόνον αν ικανοποιεί $\langle x, v_i\rangle = 0$ για κάθε i. Δηλαδή το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\overline{\mathrm{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ ταυτίζεται με το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\overline{\mathrm{span}}\{v_m : m \in \mathbb{N}\}$.

Επειδή η $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H_0, από την ισότητα Parseval (!) έχουμε

$$\begin{aligned}
\text{για κάθε } m, \quad \|Bv_m\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Bv_m, y_n\rangle|^2 \\
\text{άρα για κάθε } M, \quad \sum_{m=1}^{M} \|Bv_m\|^2 &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle Bv_m, y_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{M} |\langle v_m, By_n\rangle|^2 \quad (B = B^*) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \|By_n\|^2
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα είναι η ανισότητα Bessel (!), αφού η $\{v_m\}$ είναι ορθοκανονική. Αφού η ανισότητα ισχύει για κάθε $M \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|Bv_m\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \|By_n\|^2 .$$

Επειδή όμως και η $\{v_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου H_0, αντιστρέφοντας τους ρόλους των δύο βάσεων, με τον ίδιο συλλογισμό προκύπτει η ανισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|By_n\|^2 \le \sum_{m=1}^{\infty} \|Bv_m\|^2$$

άρα έχουμε ισότητα. □