Πλησιέστερο / Κάθετο διάνυσμα

Πρόταση [Πλησιέστερο διάνυσμα][1] *Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $E \neq \emptyset$* κυρτό και πλήρες *υποσύνολο του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y\| = d(x, E) := \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του E ονομάζουμε* **(ορθή) προβολή** *του x στον E, και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.*

Απόδειξη Έστω $\delta = d(x, E)$.
Μοναδικότητα Αν $y_1, y_2 \in E$ και $\|y_1 - x\| = \delta = \|y_2 - x\|$, τότε τα $y_1 - x$ και $y_2 - x$ περιέχονται σε έναν (πραγματικό) υπόχωρο F του H με (πραγματική) διάσταση 2 (ένα επίπεδο). Είναι φανερό γεωμετρικά ότι, αν $y_1 \neq y_2$, η απόσταση του διανύσματος $\frac{y_1+y_2}{2} \in F$ από το x θα είναι γνησίως μικρότερη από δ, άτοπο.

Και πραγματικά, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε

$$\|y_1 - y_2\|^2 + 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 = 4d^2$$

οπότε αν $\|y_1 - y_2\| > 0$ τότε $\|\frac{y_1+y_2}{2} - x\| < \delta$.

(Παρατήρησε ότι η πληρότητα δεν χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη της μοναδικότητας).

Ύπαρξη Υπάρχει μια ακολουθία (y_n) στοιχείων του E ώστε $\delta \leqslant \|y_n - x\| < \delta + \frac{1}{n}$. Αν $n, m \in \mathbb{N}$, τα $y_n - x$ και $y_m - x$ περιέχονται σε ένα (πραγματικό) επίπεδο στον H. Ισχυρίζομαι ότι η ακολουθία (y_n) είναι βασική.

Η γεωμετρική ιδέα είναι η εξής: Αφού τα μήκη των διανυσμάτων $y_n - x$ και $y_m - x$ είναι σχεδόν ίσα όταν τα n, m είναι αρκετά μεγάλα, φαίνεται γεωμετρικά ότι τα y_n και y_m δεν μπορεί να απέχουν πολύ μεταξύ τους: αν η απόσταση τους δεν ήταν μικρή, κάποιο σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει θα απείχε απ' το x λιγότερο από δ.

Η αυστηρή απόδειξη είναι η ακόλουθη: εφαρμόζουμε τον κανόνα του Παραλληλογράμμου στα $y_n - x$ και $y_m - x$ βρίσκουμε

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Επειδή $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in E$ (κυρτότητα τουE), έχουμε $\|\frac{1}{2}(y_n + y_m) - x\| \geqslant \delta$, άρα

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2.$$

[1] nearest, 7 Okt. 2019 compiled 3 Ιουνίου 2021

Όταν $n \to \infty$ και $m \to \infty$, το δεξιά μέλος της ανισότητας τείνει στο $2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$, και επομένως η (y_n) είναι βασική ακολουθία.

Επειδή ο E είναι *πλήρης*, υπάρχει $y \in E$ ώστε $\|y - y_n\| \to 0$. Τέλος, η συνέχεια της νόρμας δείχνει ότι

$$\|y - x\| = \lim \|y_n - x\| = \delta. \quad \square$$

Πρόταση [Κάθετο διάνυσμα] *Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, E* πλήρης γραμμικός υπόχωρος *του H. Αν $x \in H \backslash E$, η (ορθή) προβολή $P_E(x)$ του x στον E είναι το μοναδικό $y \in E$ τέτοιο ώστε $x - y \perp E$.*

Απόδειξη Έστω $\delta = d(x, E)$.

Αν $y \in E$ και $x - y \perp E$, τότε για κάθε $z \in E$ έχουμε

$$\begin{aligned} x - z &= x - y + y - z \\ \text{άρα (Πυθ.) } \|x - z\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \end{aligned}$$

γιατί $x - y \perp y - z$. Συνεπώς $\|x - z\| \geqslant \|x - y\|$ για κάθε $z \in E$, οπότε $\|x - y\| = \delta$, άρα $y = P_E(x)$.

Αντίστροφα, έστω $y_x = P_E(x)$. Αν $z \in E$, πρέπει να δείξουμε ότι $x - y_x \perp z$. Θεωρούμε τον γραμμικό υπόχωρο $E_z = \text{span}\{z, y_x\} \subseteq E$. Αφού $\dim E_z < \infty$, υπάρχει[2] ένα διάνυσμα $w_x \in E$ ώστε $x - w_x \perp E_z$. Τότε όμως,

$$x - y_x = x - w_x + w - y_x \Rightarrow \|x - y_x\|^2 = \|x - w_x\|^2 + \|w_x - y_z\|^2 \geqslant \|x - w_x\|^2$$

και συνεπώς $\delta^2 \geqslant \|x - y_x\|^2 \geqslant \|x - w_x\|^2 \geqslant \delta^2$ άρα $\|x - y_x\| = \|x - w_x\|$ οπότε $w_x = y_x$ απ' τη μοναδικότητα του y_x. Δηλαδή $x - y_x = x - w_x \perp E_z$ και άρα $x - y_x \perp z$. $\square$

[2] $w_x = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \langle x, e_2 \rangle e_2$ όπου $\{e_1, e_2\}$ μια ορθοκανονική βάση του E_z