Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV
Παράδοση: 5 Ιουνίου 2021

1. Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής, θέτουμε $m := \inf_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$, και $M := \sup_{\|x\|=1}\langle Ax, x\rangle$.
Στόχος: να δειχθεί ότι $\{m, M\} \subseteq \sigma(A) \subseteq [m, M]$.
Ειδικότερα, αν $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$, τότε $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Υπόδειξη:

(i) Έστω $\lambda \notin [m, M]$ και $d := \text{dist}(\lambda, [m, M])$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in H$,

$$\|(A - \lambda I)x\| \geq d\,\|x\| \quad \text{και} \quad \left\|(A - \bar{\lambda} I)x\right\| \geq d\,\|x\|.$$

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο τιμών του $A - \lambda I$ είναι πυκνό στον H.

(iii) Δείξτε ότι το σύνολο τιμών του $A - \lambda I$ είναι κλειστό στον H.

2. [*Μοναδικότητα πολικής αναπαράστασης*] Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Έχουμε δείξει ότι υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε $T = V|T|$.

Αν επίσης $T = UP$ όπου $P \in \mathcal{B}(H_1)$ θετικός τελεστής και U μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{P(H_1)} \subseteq H_1$, δείξτε ότι $P = |T|$ και $U = V$.

3. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιήσιμος τελεστής (δηλαδή, υπάρχει μια *ορθοκανονική βάση του* H από ιδιοδιανύσματα του A). Δείξτε ότι κάθε ιδιόχωρος $M_\lambda(A)$ του A περιέχεται στον ιδιόχωρο $M_{|\lambda|^2}(A^*A)$ του A^*A και ότι $\sigma_p(A^*A) = \{|\lambda|^2 : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

4. (α) Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία *ορθοκανονική βάση* $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δύο και παράγουν τον H.

(β) Δείξτε ότι ο τελεστής $S^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$ έχει μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που παράγουν το χώρο (δηλ. η κλειστή γραμμική τους θήκη είναι ο ℓ^2).

5. Δίδονται ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) στους χώρους Hilbert K και H αντίστοιχα, και μια φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $(\lambda(n))$. Έχουμε δείξει ότι ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

(i) Δείξτε ότι η νόρμα του τελεστή A ισούται με $\sup_k |\lambda(k)|$.

(ii) Επίσης, δείξτε ότι η σειρά τελεστών $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)$ συγκλίνει στη νόρμα του χώρου $\mathcal{B}(H, K)$ (δηλαδή στη νόρμα τελεστή) αν και μόνον αν η $(\lambda(n))$ είναι μηδενική ακολουθία.

(iii) [Διορθωμένη] Αν $H = K$, ο A είναι φυσιολογικός και *ο* $(\lambda(n))$ *είναι γνησίως φθίνουσα μηδενική ακολουθία*, να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $\lambda(i)$, x_i, y_i και των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A.

(iv) Αν $H = K$ και ο A είναι φυσιολογικός και γράφεται επίσης $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(i)(u_i v_i^*)$, όπου οι (u_n) και (v_n) είναι επίσης ορθοκανονικές ακολουθίες και $(\lambda(i)), (\mu(i))$ είναι φθίνουσες μηδενικές ακολουθίες θετικών αριθμών, δείξτε ότι $(\lambda(n)) = (\mu(n))$. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum_n \lambda(n)$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται *τελεστής ίχνους (trace class operator)* ή καμιά φορά *πυρηνικός τελεστής*.

6. [Διορθωμένη] Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής και *φυσιολογικός*. Αν το 0 είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(A)$, δείξτε ότι $0 \in \sigma_p(A)$. Ισχύει το αντίστροφο; [1]

7. Έστω $f \in C([0,1]$ και $M_f : L^2([0,1] \to L^2([0,1]$ ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής. Δείξτε ότι $\sigma(M_f) = f([0,1])$. Δείξτε επίσης ότι αν $g : \sigma(M_f) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε $g(M_f) = M_{g\circ f}$.

[1] Πρβλ. Ο τελεστής V του Volterra είναι συμπαγής, 1-1, και $\sigma(V) = \{0\}$. Ευχαριστούμε τον Μ.Κ.