Ένα παράδειγμα: το φάσμα του U

Υπενθύμιση:

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1} \ (n \in \mathbb{Z}) \,.$$

Πρόταση 1 *Ο τελεστής U δεν έχει ιδιοτιμές:* $\sigma_p(U) = \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $x \neq 0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $Ux = \lambda x$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)e_{n+1} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda x(n) e_n \\ \iff \quad x(n-1) &= \lambda x(n) \ \ \forall n \in \mathbb{Z} \\ \iff \quad x(k) &= \lambda^{-k} x(0) \ \ \forall k \in \mathbb{Z} \,. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $x(0) \neq 0$, αλλιώς θα είχαμε $x(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, πρέπει $\sum_{k\geq 0} |x(k)|^2 < \infty$, οπότε πρέπει $|\lambda^{-k}| < 1$, δηλαδή $|\lambda| > 1$. Όμως τότε
$\sum_{k\geq 0} |x(-k)|^2 = \sum_{k\geq 0} |\lambda^{2k} x(0)|^2 = \infty$, άτοπο.

Για να μελετήσουμε το φάσμα του U είναι βολικό να περάσουμε στο χώρο $L^2([-\pi,\pi])$. Υπενθυμίζουμε ότι η απεικόνιση

$$F : L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

(ο μετασχηματισμός Fourier) είναι unitary (ισομετρία επί). Εδώ

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \langle f, f_n \rangle$$

όπου $f_n(t) = e^{int}$, $t \in [-\pi,\pi]$. Δηλαδή ο F απεικονίζει την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ (που είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([-\pi,\pi])$) στην ορθοκανονική βάση $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Θεωρούμε τον τελεστή $M := F^{-1}UF \in \mathcal{B}(L^2([-\pi,\pi]))$.

$$\begin{tikzcd} \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, tail, two heads, "U"] & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ L^2([-\pi,\pi]) \arrow[u, tail, two heads, "F"] \arrow[r, tail, two heads, "M"'] & L^2([-\pi,\pi]) \arrow[u, tail, two heads, "\mathrm{F}"'] \end{tikzcd}$$

Από τη σχέση $Ue_n = e_{n+1}$ έχουμε

$$Mf_n = F^{-1}UFf_n = F^{-1}Ue_n = F^{-1}e_{n+1} = f_{n+1}$$

δηλαδή

$$(Mf_n)(t) = f_{n+1}(t) = e^{i(n+1)t} = e^{it} f_n(t) \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

και συνεπώς, αφού η $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([-\pi,\pi])$,

$$(Mf)(t) = e^{it} f(t) \ \ \forall f \in L^2([-\pi,\pi]) \,.$$

Εφόσον οι τελεστές U και M είναι όμοιοι, μάλιστα unitarily ισοδύναμοι, είναι φανερό ότι

$$\sigma(M) = \sigma(U) \quad \text{και} \quad \sigma_p(M) = \sigma_p(U) \,.$$

Έτσι ξέρουμε ήδη ότι $\sigma_p(M) = \emptyset$.

Πρόταση 2 $\sigma(M) = \sigma(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ και $f \in C([-\pi, \pi])$ έχουμε

$$(M - \lambda I)f(t) = (e^{it} - \lambda)f(t), \ t \in [-\pi, \pi] .$$

(i) Αν $|\lambda| \neq 1$, η συνάρτηση $g(t) = \frac{1}{e^{it}-\lambda}$ ορίζεται σ' όλο το $[-\pi, \pi]$ και είναι συνεχής, οπότε ο αντίστοιχος πολλαπλασιστικός τελεστής M_g είναι φραγμένος, και έχουμε

$$M_g(M - \lambda I)f(t) = g(t)(e^{it} - \lambda)f(t) = f(t), \ t \in [-\pi, \pi]$$

δηλαδή $M_g(M - \lambda I) = I$ και ομοίως $(M - \lambda I)M_g = I$. Δηλαδή ο $M - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\lambda \notin \sigma(M)$.

(ii) Αν $|\lambda| = 1$, θα δείξουμε ότι ο $M - \lambda I$ δεν είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\lambda \in \sigma(M)$.

Υπάρχει $\theta \in -\pi, \pi]$ ώστε $\lambda = e^{i\theta}$. Η ιδέα είναι η εξής: Αν υπήρχε ένα $f \in L^2([-\pi, \pi])$, $f \neq 0$ ώστε $f(t) = 0$ για κάθε $t \neq \theta$, θα είχαμε

$$(M - \lambda I)f(t) = (e^{it} - e^{i\theta})f(t) = 0, \ \forall t \in [-\pi, \pi] .$$

οπότε το f θα ήταν ιδιοδιάνυσμα του M με ιδιοτιμή το λ. Φυσικά δεν υπάρχει τέτοια f. Μπορούμε όμως να βρούμε ακολουθία (f_n) από μοναδιαία διανύσματα που να φέρονται σε «μικρές περιοχές» $[\theta - \frac{1}{n}, \theta + \frac{1}{n}]$ του θ που να ικανοποιούν $\|(M - \lambda I)f_n\| \to 0$, οπότε ο $M - \lambda I$ δεν θα είναι αντιστρέψιμος (το λ θα είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του M).

Ένας τρόπος είναι ο ακόλουθος: Έστω $\epsilon \in (0, \pi)$. Η συνάρτηση

$$g_\epsilon(t) := \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \left|\frac{t}{\epsilon}\right|\right)\chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(t)$$

είναι συνεχής, μηδενίζεται έξω απ' το $[-\epsilon, \epsilon]$ και έχει $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g_\epsilon(t)|dt = 1$ (βάση x ύψος /2). Επομένως η συνάρτηση

$$f_\epsilon(t) := \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\left(1 - \left|\frac{t-\theta}{\epsilon}\right|\right)^{1/2}\chi_{[\theta-\epsilon,\theta+\epsilon]}(t)$$

είναι συνεχής, μηδενίζεται έξω απ' το $[\theta - \epsilon, \theta + \epsilon]$ και έχει $\|f_\epsilon\|_2^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |g_\epsilon(t)|dt = 1$.[1] Υπολογίζουμε τώρα

$$\begin{aligned}
\|(M - \lambda I)f_\epsilon\|_2^2 &= \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} |e^{it} - e^{i\theta}|^2|f_\epsilon(t)|^2dt = \int_{\theta-\epsilon}^{\theta+\epsilon} |e^{i(t-\theta)} - 1|^2|f_\epsilon(t)|^2dt \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |e^{is} - 1|^2|f_\epsilon(s + \theta)|^2dt \quad (\text{θέτοντας } s = t - \theta) \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} |e^{is} - 1|^2\frac{1}{\epsilon}\left(1 - \left|\frac{s}{\epsilon}\right|\right)ds \\
&\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} s^2\frac{1}{\epsilon}\left(1 - \left|\frac{s}{\epsilon}\right|\right)ds \quad (\text{γιατί } \ |e^{is} - 1|^2 = |2i\sin\frac{s}{2}|^2 \leq s^2) \\
&= \frac{1}{6}\epsilon^2
\end{aligned}$$

οπότε $\lim\limits_{\epsilon\to 0} \|(M - \lambda I)f_\epsilon\|_2 = 0$, όπως θέλαμε.

[1] Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό ώστε $[\theta - \epsilon, \theta + \epsilon] \subseteq [-\pi, \pi]$. Στις περιπτώσεις $\theta = \pm\pi$ θεωρούμε διαστήματα $[\theta, \theta + \epsilon]$ ή $[\theta - \epsilon, \theta]$.