Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις III
Υποδείξεις

1. *Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, ισχύει η ισοδυναμία*
$(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP.$

Υπόδειξη Αν $(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q$, πολλαπλασιάζοντας αριστερά με P και χρησιμοποιώντας ότι, για δυο προβολές, αν $P_1 \geq P_2$ τότε $P_1P_2 = P_1 \wedge P_2$, συμπεραίνουμε ότι $P \wedge Q = PQ$, οπότε η PQ είναι προβολή, άρα $PQ = QP$.

Για το αντίστροφο, η υπόθεση δίνει $P \wedge Q = PQ$. Για να δείξουμε ότι $(P \vee Q) = P + Q - PQ$ παρατηρούμε ότι $P+Q-PQ = PQ^{\perp}+Q = P+P^{\perp}Q$. Αν $M = \text{ImP}$ και $N = \text{ImQ}$, οι προβολές $P^{\perp}Q$ και P προβάλλουν στους *κάθετους* υποχώρους $M^{\perp}\cap N$ και M, άρα το άθροισμά τους είναι προβολή, στον χώρο $(M^{\perp}\cap N)+M$. Για τον ίδιο λόγο, το άθροισμα $PQ^{\perp}+Q$ είναι προβολή στον χώρο $(M\cap N^{\perp})+N$. Αυτοί οι δύο χώροι επομένως ταυτίζονται. Δείχνουμε ότι ταυτίζονται με τον $M \vee N$.

2. *(Μια κλάση τελεστών που περιέχει τις ισομετρίες και τις προβολές.)*
Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία *αν ο $V|_{\ker V^{\perp}}$ είναι ισομετρία (με* αρχικό χώρο *τον* $\ker V^{\perp}$ *και* τελικό χώρο *τον $V(H_1)$). Δείξτε ότι ένας τελεστής $W \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι μερική ισομετρία αν και μόνον αν ο W^*W είναι προβολή, αν και μόνον αν ο W^* είναι μερική ισομετρία και βρείτε τον αρχικό και τον τελικό χώρο του W^*.*

Δείτε το αρχείο `merisom21.pdf`.

3. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Αν S_A είναι η προβολή στον υπόχωρο $\overline{A(H)}$, τότε*
(α) η $S_A^{\perp} := I - S_A$ είναι η προβολή στον $\ker A$
(β) $S_AA = A$
(γ) αν P είναι προβολή με $PA = A$, τότε $PS_A = S_A$
(δηλ. η S_A είναι η μικρότερη προβολή P που ικανοποιεί $PA = A$).

4. *Έστω H χώρος Hilbert και $V, P \in \mathcal{B}(H)$ όπου V ισομετρία και P προβολή. Να δειχθεί ότι*

$$VP = PVP \iff P = V^*PVP.$$

Υπόδειξη $VP = PVP \Rightarrow V^*VP = V^*PVP \Rightarrow P = V^*PVP$ γιατί $V^*V = I$.
Αντίστροφα, αν $P = V^*PVP$ γράφουμε για κάθε $x \in H$

$$VPx = P(VPx) + P^{\perp}(VPx)$$

οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\|P(VPx)\|^2 + \left\|P^{\perp}(VPx)\right\|^2 = \|VPx\|^2 \stackrel{(is)}{=} \|Px\|^2 = \|V^*PVPx\|^2 \leq \|PVPx\|^2$$

και συνεπώς $\left\|P^{\perp}(VPx)\right\|^2 = 0$, άρα $(I - P)VP = 0$ δηλαδή $VP = PVP$.

5. *Έστω $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k^*$ όπου οι οικογένειες$\{x_k\}$ και $\{y_k\}$ είναι ορθοκανονικές. Προφανώς $\|A\| \leq \sum_k |\lambda_k|$. Βρείτε ένα μια καλύτερο φράγμα για την $\|A\|$. [Υπόδειξη: τι συμβαίνει όταν $x_k = y_k = e_k$;] Δείξτε ότι το άνω φράγμα που βρήκατε είναι ισότητα.*

Υπόδειξη Για κάθε $y \in H_1$, αφού και οι δυο οικογένειες είναι ορθοκανονικές,

$$\begin{aligned} Ay &= \sum \lambda_k \langle y, y_k\rangle x_k \\ \text{άρα} \quad \|Ay\|^2 &= \sum |\lambda_k\langle y, y_k\rangle|^2 \leq \max\{|\lambda_k|\}^2 \sum |\langle y, y_k\rangle|^2 \\ \text{άρα} \quad \|A\| &\leq \max\{|\lambda_k|\}\,. \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, επιλέγουμε k_0 ώστε $|\lambda_{k_0}| = \max\{|\lambda_k|\}$ και θέτουμε $y = y_{k_0}$.

6. *Έστω $H = H_0 \oplus H_0$ όπου H_0 χώρος Hilbert (π.χ. ℓ^2). Έστω $A \in \mathcal{B}(H_0)$ με $A(H_0)$ όχι κλειστό στον H_0 (π.χ. $A = \mathrm{diag}(\frac{1}{n})$ στον ℓ^2). Ορίζουμε $M = H_0 \oplus \{0\}$ και $N = \mathrm{Gr}(A) := \{x \oplus Ax : x \in H_0\}$.*

Δείξτε ότι οι M και N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, αλλά ο $M + N$ δεν είναι κλειστός.

Υπόδειξη Είναι φανερό ότι ο M είναι κλειστός. Για τον N: Αν μια ακολουθία (ξ_n) από τον N συγκλίνει σε κάποιο $\xi = (x, y) \in H$, γράφοντας $\xi_n := (x_n, Ax_x)$ έχουμε ότι $x_n \to x$ και $Ax_n \to y$. Αλλά $Ax = A(\lim x_n) = \lim Ax_n = y$, άρα $\xi = (x, Ax) \in N$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο $M + N$ είναι κλειστός, και θα δείξουμε ότι ο $A(H_0)$ είναι κλειστός υπόχωρος του H_0. Πράγματι, αν $y = \lim A(x_n) \in \overline{A(H_0)}$, τότε γράφοντας

$$(0, Ax_n) = (-x_n, 0) + (x_n, Ax_n)$$

βλέπουμε ότι $(0, Ax_n) \in M + N$ για κάθε n. Συνεπώς $(0, y) = \lim_n (0, Ax_n) \in \overline{M + N} = M + N$. Άρα υπάρχουν $\xi \in M, \eta \in N$ ώστε $(0, y) = \xi + \eta$. Δηλαδή υπάρχουν $x, z \in H_0$ ώστε $(0, y) = (x, 0) + (z, Az)$, οπότε $y = Az \in A(H_0)$.

7. *(α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.*

Υπόδειξη Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του H δεν είναι συμπαγής, καθώς περιέχει μιά άπειρη ορθοκανονική ακολουθία, η οποία δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, γιατί οι όροι της απέχουν $\sqrt{2}$ μεταξύ τους.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_ϵ ώστε για κάθε $x = (x(n)) \in C$ *να έχουμε* $\sum\limits_{n > n_\epsilon} |x(n)|^2 < \epsilon^2$.

Υπόδειξη Αν το C είναι συμπαγές, για κάθε $\epsilon > 0$ καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες $B(x_k, \epsilon/2)$, $k = 1, \dots, N$. Αφού $x_k = (x_k(n)) \in \ell^2$, υπάρχει $n_\epsilon > 0$ ώστε για όλα τα $k = 1, \dots, N$ να ισχύει $\sum_{n > n_e} |x_k(n)|^2 < (\epsilon/2)^2$.

Αν $x \in C$, υπάρχει $k \in \{1, \dots, N\}$ ώστε $x \in B(x_k, \epsilon/2)$, δηλαδή $\|x - x_k\| < \epsilon/2$. Έχουμε λοιπόν (από την ανισότητα Minkowski)

$$\left(\sum_{n > n_\epsilon} |x(n)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n > n_\epsilon} |x(n) - x_k(n)|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{n > n_\epsilon} |x_k(n)|^2 \right)^{1/2} < \epsilon/2 + \epsilon/2 \,.$$

Αντίστροφα: Έστω ότι το C ικανοποιεί τη συνθήκη της υπόθεσης. Για κάθε $\epsilon > 0$ ονομάζουμε P_ϵ την προβολή στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_{n\epsilon}\}$ και θέτουμε $C_\epsilon = P_\epsilon(C)$. Εφόσον η P_ϵ είναι συμπαγής τελεστής (αφού έχει τάξη n_ϵ), έπεται ότι το C_ϵ είναι ολικά φραγμένο σύνολο. Συνεπώς καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες $B(y_k, \epsilon), k = 1, \dots, M$.

Για κάθε $x \in C$, αφού $P_\epsilon x \in C_\epsilon$, υπάρχει $i \in \{1, \dots, M\}$ ώστε $\|P_\epsilon(x) - y_i\| < \epsilon$. Τότε

$$\|x - y_i\|^2 = \sum_{n=1}^{n_\epsilon} |x(n) - y_i(n)|^2 \; + \sum_{n > n_\epsilon} |x(n) - 0|^2 < \epsilon^2 + \epsilon^2 \,.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι, για κάθε $\epsilon > 0$, το C καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες $B(y_k, \sqrt{2}\epsilon), k = 1, \dots, M$, δηλαδή είναι ολικά φραγμένο.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

Υπόδειξη Ελέγχεται εύκολα ότι το C_u είναι κλειστό, οπότε η συμπάγεια έπεται επειδή ικανοποιεί το κριτήριο από το (β).

8. *Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y\rangle| \leq |\langle Kx, y\rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \leq A \leq K$ είναι συμπαγής.*

Υπόδειξη Από την υπόθεση, ο A ικανοποιεί το κριτήριο, ότι $\lim_n \langle Ax_n, x_n\rangle = 0$ για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) από τον H. Συνεπώς είναι συμπαγής.

9. *Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι συμπαγής τελεστής.*

(α) Αν οι $A_n, A \in \mathcal{B}(H_2)$ ικανοποιούν $A_n y \to Ay$ για κάθε $y \in H_2$, δείξτε ότι $\|A_nK - AK\| \to 0$.

Υπόδειξη Θέτουμε $C_n := A_n - A$ και θα δείξουμε ότι $\|C_nK\| \to 0$. Το σύνολο $K(\text{ball}(H_1)$ είναι ολικά φραγμένο, οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες $B(Kx_k, \epsilon), k = 1, \ldots, N$, δηλαδή για κάθε $x \in \text{ball}(H_1)$ υπάρχει $k \in \{1, \ldots, N\}$ ώστε $\|Kx - Kx_k\| < \epsilon$.

Επειδή για κάθε $k \in \{1, \ldots, N\}$ έχουμε $\lim_n \|C_nKx_k\| = 0$, υπάρχει $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_\epsilon$ και κάθε $k \in \{1, \ldots, N\}$ να έχουμε $\|C_nKx_k\| < \epsilon$.

Αν $x \in \text{ball}(H_1)$ και $n \geq n_\epsilon$, επιλέγοντας k ώστε $\|Kx - Kx_k\| < \epsilon$ έχουμε

$$\|C_nKx\| \leq \|C_nKx - C_nKx_k\| + \|C_nKx_k\| < \|C_n\| \|Kx - Kx_k\| + \|C_nKx_k\| \leq \|C_n\| \epsilon + \epsilon\,.$$

Παρατηρούμε όμως ότι η ακολουθία (C_n) αποτελείται από φραγμένους τελεστές ορισμένους σε χώρο Banach, και είναι κατά σημείο φραγμένη (αφού συγκλίνει κατά σημείο). Συνεπώς, από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος (!) είναι ομοιόμορφα φραγμένη, υπάρχει δηλαδή $M > 0$ ώστε $\|C_n\| \leq M$ για κάθε n. Η προηγούμενη ανισότητα δίνει λοιπόν, για κάθε $n \geq n_\epsilon$,

$$\|C_nKx\| < (M+1)\epsilon$$

και συνεπώς $\|C_nK\| \to 0$.

(β) Δείξτε ότι η μετατροπή της σημειακής σύγκλισης σε σύγκλιση ως προς τη νόρμα δεν ισχύει "από τα δεξιά": δώστε παράδειγμα ακολουθίας (B_n) στον $\mathcal{B}(H_1)$ που ικανοποιεί $B_nx \to 0$ για κάθε $x \in H_1$, αλλά δεν ικανοποιεί $\|KB_n\| \to 0$.

Υπόδειξη Στον ℓ^2 θεωρούμε τον συμπαγή (μάλιστα πρώτης τάξης) τελεστή $K := P([e_1])$, δηλαδή $Kx = \langle x, e_1\rangle e_1$ και ορίζουμε τους τελεστές B_n από τη σχέση $B_ne_k = e_{k-n}$ αν $n < k$ και $B_ne_k = 0$ αν $n \geq k$, δηλαδή[1]

$$B_n\left(\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_{k-n}\,.$$

Είναι φανερό ότι $\|B_nx\| \to 0$ για κάθε x. Όμως $B_ne_{n+1} = e_1$, συνεπώς

$$\|KB_n\| \geq \|KB_ne_{n+1}\| = \|e_1\| = 1$$

για κάθε n, άρα η $(\|KB_n\|)$ δεν συγκλίνει στο 0.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) και μια ορθοκανονική βάση στον χώρο $\text{im}K$, δώστε μια άλλη απόδειξη ότι ο K προσεγγίζεται από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Υπόδειξη Ξέρουμε ότι ο χώρος $\overline{\text{im}K}$ είναι διαχωρίσιμος. Θεωρούμε μια ορθοκανονική του βάση από στοιχεία του $\text{im}K$, έστω $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ και ονομάζουμε P_n την προβολή στον χώρο $M_n := \text{span}\{y_1, \ldots, y_n\}$. Ο χώρος $\text{im}K$ είναι η ένωση της αύξουσας ακολουθίας των υποχώρων M_n επομένως η προβολή, έστω P, στην κλειστή θήκη του $\text{im}K$ είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας των προβολών P_n, δηλαδή έχουμε $\|Py - P_ny\|_{H_2} \to 0$ για κάθε $y \in H_2$.

Από το (β) έχουμε $\|PK - P_nK\|_{\mathcal{B}} \to 0$. Όμως $PK = K$ αφού η P είναι η προβολή στην κλειστή θήκη του $\text{im}K$, άρα $\|K - P_nK\|_{\mathcal{B}} \to 0$.

[1] παρατήρησε ότι $B_n = (S^*)^n$

Σχόλια (ι) Δεν χρειάσθηκε η αρχή ομοιομόρφου φράγματος στο (γ), γιατί η ακολουθία (P_n) είναι έτσι κι αλλιώς ομοιόμορφα φραγμένη από το 1.

(ιι) Αν $H_1 = H_2$ είναι διαχωρίσιμος χώρος, και $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική του βάση, τότε έχουμε επιπλέον

$$\|K - P_n K P_n\|_{\mathcal{B}} \to 0$$

Πράγματι,

$$\|K - P_n K P_n\| \leq \|K - P_n K\| + \|P_n K - P_n K P_n\| \leq \|K - P_n K\| + \|K - K P_n\|$$

Ο πρώτος προσθετέος τείνει στο 0 όπως μόλις δείξαμε.
Για τον δεύτερο, έχουμε $\|K - KP_n\| = \|K^* - P_n K^*\| \to 0$ γιατί ο K^* είναι συμπαγής και $P_n \to I$ κατά σημείο.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι κάθε συμπαγής τελεστής σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι το $\|\cdot\|$-όριο των ‘compressions’ $P_n K|_{M_n}$ του στους πεπερασμένης διάστασης υποχώρους span$\{y_1, \ldots, y_n\}$. Με άλλα λόγια, ο $\infty \times \infty$ πίνακας $[k_{ij}]$ του K ως προς την ορθοκανονική βάση $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι το $\|\cdot\|$-όριο των $n \times n$ υποπινάκων $[k_{ij}]_{i,j \in [n]}$.