Παρατηρήσεις για τους συμπαγείς τελεστές

Πρόταση 1 *Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \to K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\operatorname{im} A}$ και $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμοι.*

Απόδειξη Δίνουμε μια απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης:

(i) Ο $\operatorname{im} A$, άρα και ο $\overline{\operatorname{im} A}$, είναι διαχωρίσιμος:

Αφού ο $A : H \to K$ είναι συμπαγής, το σύνολο $F := A(\operatorname{ball} H) \subseteq K$ είναι ολικά φραγμένο. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $Y_n \subseteq F$ ώστε το F να καλύπτεται από μπάλες με ακτίνα $1/n$ και κέντρα από το Y_n. Το σύνολο $Y := \{my : m \in \mathbb{N}, y \in \cup_n Y_n\}$ είναι αριθμήσιμο, και είναι πυκνό στον $\operatorname{im} A$: πράγματι, αν $\epsilon > 0$ και $x \in H$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $T(\frac{x}{m}) \in A(\operatorname{ball} H)$ (πάρε π.χ. $m \geq \|x\|$), οπότε επιλέγοντας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{m}{n} < \epsilon$ έχουμε $\left\|T(\frac{x}{m}) - y\right\| < \frac{1}{n}$ για κάποιο $y \in Y_n$, δηλαδή $\|T(x) - my\| < \frac{m}{n} < \epsilon$.

(ii) Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος:

Θυμίζουμε ότι $(\ker A)^\perp = (\ker A^*A)^\perp = \overline{\operatorname{im}(A^*A)}$ και ότι ο A^*A είναι συμπαγής, άρα ο $\overline{\operatorname{im}(A^*A)}$ είναι διαχωρίσιμος από το (i). $\square$

Πρόταση 2 *Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.*

Απόδειξη Υποθέτουμε πρώτα ότι ο T είναι συμπαγής. Αν $\{x_n\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία του H, τότε, επειδή ο $T^*T \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής, έχουμε $\langle T^*Tx_n, x_n\rangle \to 0$ και συνεπώς

$$\|Tx_n\|^2 = \langle Tx_n, Tx_n\rangle = \langle T^*Tx_n, x_n\rangle \to 0$$

άρα η (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

Για το αντίστροφο, έστω $\{x_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία του H. Από την υπόθεση έχουμε ότι το όριο $y := \lim_n Tx_n$ υπάρχει στον K. Θα δείξουμε πρώτα ότι αναγκαστικά $y = 0$.

Πράγματι, για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\langle y, z\rangle = \lim_n \langle Tx_n, z\rangle = \lim_n \langle x_n, T^*z\rangle\,.$$

Όμως, $\sum_n |\langle x_n, T^*z\rangle|^2 \leq \|T^*z\|^2$ (ανισότητα Bessel) και συνεπώς η ακολουθία $\{\langle x_n, T^*z\rangle\}$ είναι μηδενική, άρα $\langle y, z\rangle = \lim_n \langle x_n, T^*z\rangle = 0$ και αφού $\langle y, z\rangle = 0$ για κάθε $z \in K$, έπεται ότι $y = 0$.

Έχουμε λοιπόν $\|Tx_n\|_K \to 0$. Αλλά $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \leq \|Tx_n\|$, άρα $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$ και συνεπώς, όπως έχουμε δείξει, ο T είναι συμπαγής. $\square$

Παρατηρούμε ότι τα προηγούμενα επιχειρήματα στηρίχθηκαν στο γεγονός ότι, αν μια ακολουθία (y_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα σ' ένα y, τότε συγκλίνει «ασθενώς», δηλαδή $\langle y_n, z\rangle \to \langle y, z\rangle$ για κάθε z. Δεν ισχύει βέβαια το αντίστροφο (σε απειροδιάστατους χώρους): για παράδειγμα, μια ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει ασθενώς στο 0 (ανισότητα Bessel), αλλά όχι ως προς τη νόρμα του χώρου, αφού $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1 *Μια ακολουθία* (u_n) *σε έναν χώρο Banach* E συγκλίνει ασθενώς σε ένα $u \in E$ *αν για κάθε* $\phi \in E^*$ *ισχύει* $\lim_n \phi(u_n) = \phi(u)$.

Πρόταση 3 *Αν* H, K *είναι χώροι Hilbert και* $T \in \mathcal{B}(H, K)$*, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T *είναι συμπαγής.*

(ii) Για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία (v_n) *του* H *ισχύει ότι* $\|Tv_n\|_K \to 0$.

(iii) Για κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία (u_n) *του* H*, η ακολουθία* (Tu_n) *είναι* $\|\cdot\|_K$*-συγκλίνουσα.*

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα

Λήμμα 1 *Αν μια ακολουθία* (u_n) *του* H *είναι ασθενώς φραγμένη, τότε είναι* $\|\cdot\|_H$*-φραγμένη.*

Απόδειξη Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε μια συνεχή γραμμική μορφή

$$u_n^* : H \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle x, u_n \rangle .$$

Από την υπόθεση, για κάθε $x \in H$ η ακολουθία $\{u_n^*(x)\}$ είναι φραγμένη (στο $\mathbb{C}$). Δηλαδή η ακολουθία των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $\{u_n^*\}$ είναι *κατά σημείο φραγμένη*. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος [1] έπεται ότι είναι *ομοιόμορφα φραγμένη*, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά M ώστε $\|u_n^*\| \leq M$ για κάθε n.

Όμως $\|u_n^*\| = \sup\{|\langle x, u_n\rangle| : x \in \text{ball}(H)\} = \|u_n\|$. □

Απόδειξη της Πρότασης 3 $(i) \Rightarrow (ii)$ Έστω ότι η ακολουθία (v_n) συγκλίνει ασθενώς στο 0. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι η ακολουθία $(\|Tv_n\|)$ δεν συγκλίνει στο 0. Τότε θα υπάρχει μια υπακολουθία της, έστω (Tz_n), και ένα $\delta > 0$ ώστε $\|Tz_n\|_K \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (z_n) συγκλίνει ασθενώς, οπότε είναι ασθενώς φραγμένη, άρα (από το Λήμμα) $\|\cdot\|_H$-φραγμένη. Αφού ο T είναι συμπαγής, η (Tz_n) έχει μια υπακολουθία, έστω (Tw_n), που είναι $\|\cdot\|_K$-συγκλίνουσα.

Έστω $y = \lim_n Tw_n$. Για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\langle y, z\rangle = \lim_n \langle Tw_n, z\rangle = \lim_n \langle w_n, T^* z\rangle = 0$$

γιατί η (w_n) είναι υπακολουθία της (v_n) και άρα ασθενώς μηδενική. Έπεται ότι $y = 0$, ενώ $\|y\| = \lim_n \|Tw_n\| \geq \delta$: άτοπο.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Έστω ότι η ακολουθία (u_n) συγκλίνει ασθενώς στο $u \in H$.

Τότε η ακολουθία $(v_n) = (u_n - u)$ είναι ασθενώς μηδενική, άρα από την υπόθεση έχουμε ότι $\|Tv_n\|_K \to 0$, δηλαδή $\|Tu_n - Tu\|_K \to 0$. Δηλαδή η (Tu_n) είναι $\|\cdot\|_K$-συγκλίνουσα (στο Tu).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Έστω (x_n) μια ορθοκανονική ακολουθία. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, η (x_n) είναι ασθενώς μηδενική, οπότε από την υπόθεσή μας έχουμε $\|Tx_n\|_K \to 0$. Από την Πρόταση 2, έπεται ότι ο T είναι συμπαγής. □

[1] Δείτε τις σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης ή το
`https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH495/pubn.pdf`