Κάθετες ανά δύο προβολές

Η επόμενη πρόταση είναι μια άλλη προσέγγιση στους χαρακτηρισμούς ακολουθίας κάθετων ανά δύο προβολών (πεπερασμένης ή άπειρης).

Πρόταση 1 *Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \le I$, ισοδύναμα $\left\|\sum_{n=1}^{m} P_n\right\| \le 1$.

(ii) Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.

(iv) $\sum_n \|P_n x\|^2 \le \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$.

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Απόδειξη $(i) \Rightarrow (ii)$ Αν $x \in \operatorname{im} P_k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, θα έχουμε για κάθε $N \ge k$, από την υπόθεση,

$$\|x\|^2 = \|P_k x\|^2 \le \sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \langle P_n x, x\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} P_n x, x\rangle \le \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

επομένως ισχύει ισότητα. Άρα $\sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|^2 = \|P_k x\|^2$, πράγμα που σημαίνει ότι όταν $n \neq k$ τότε $\|P_n x\|^2 = 0$, άρα $x \in \ker P_n$. Συνεπώς $\operatorname{im} P_k \subseteq \ker P_n$, δηλαδή οι P_n, P_k είναι κάθετες προβολές.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, δείχνουμε επαγωγικά ότι $Q_n^2 = Q_n$, οπότε η Q_n θα είναι προβολή, αφού είναι αυτοσυζυγής (άθροισμα αυτοσυζυγών).

Για $n = 1$ δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Για το επαγωγικό βήμα, αν η Q_{n-1} είναι προβολή, παρατηρούμε ότι η P_n είναι κάθετη σε όλες τις P_k $(k < n)$ άρα και στο άθροισμά τους Q_{n-1}, οπότε

$$Q_n^2 = (Q_{n-1} + P_n)^2 = Q_{n-1}^2 + Q_{n-1}P_n + P_n Q_{n-1} + P_n^2 = Q_{n-1} + 0 + 0 + P_n$$

δηλαδή $Q_n^2 = Q_n$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Αν η $Q_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ είναι προβολή, τότε, για κάθε $k < n$, επειδή $Q_n \ge Q_{n-1} \ge P_k$ έχουμε $Q_n P_k = Q_{n-1} P_k = P_k$, άρα

$$P_k = Q_n P_k = (Q_{n-1} + P_n)P_k = Q_{n-1}P_k + P_n P_k = P_k + P_n P_k\,,$$

Επομένως $P_n P_k = 0$, δηλαδή οι P_n, P_k είναι κάθετες προβολές.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} P_k x\right\|^2 = \|Q_n x\|^2 \le \|x\|^2 \quad \text{για κάθε } n$$

άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \le \|x\|^2$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Αν ισχύει η (iv) τότε για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε (αν θυμηθούμε ότι $\langle P_k x, x\rangle = \|P_k x\|^2$)

$$\langle \sum_{k=1}^{n} P_k x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle P_k x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 \le \|x\|^2 \quad \text{δηλαδή} \ \langle \sum_{k=1}^{n} P_k x, x\rangle \le \langle Ix, x\rangle$$

που σημαίνει ότι $\sum_{k=1}^{n} P_k \le I$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν οι ισοδύναμες συνθήκες. Τότε για κάθε $x \in H$ θέτοντας $x_n = Q_n x$, επειδή η σειρά $\sum\limits_n \|P_n x\|^2$ συγκλίνει, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n > m \geq n_0$ να έχουμε

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} P_k x \right\|^2 \stackrel{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} \|P_k x\|^2 < \epsilon$$

πράγμα που δείχνει ότι η (x_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει. Έστω

$$y := \lim_n x_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x\,.$$

Δείχνουμε ότι $y = Px$:
Παρατηρούμε ότι κάθε x_n ανήκει στον υπόχωρο $\operatorname{im} Q_n = \operatorname{span}\{\operatorname{im} P_k, k \leq n\} \subseteq M$, άρα στον M. Συνεπώς $y = \lim x_n \in M$, άρα $y - Px \in M$. Από την άλλη μεριά, για κάθε n, k με $n \geq k$ έχουμε $Q_n \geq P_k$ και συνεπώς $P_k x_n = P_k Q_n x = P_k x$ και $P_k x = P_k P x$ αφού $P_k \leq P$. Επομένως $P_k y = \lim P_k x_n = P_k x = P_k P x$, άρα $P_k(y - Px) = 0$. Δηλαδή το διάνυσμα $y - Px$ είναι κάθετο σε κάθε $\operatorname{im} P_k$, άρα και στην κλειστή γραμμική τους θήκη, που είναι ο M. Εφόσον όμως $y - Px \in M$, έπεται ότι $y - Px = 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $y = Px$, δηλαδή

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$$

άρα

$$\|Px\|^2 = \lim_n \left\| \sum_{k=1}^{n} P_k x \right\|^2 \stackrel{\text{Πυθ}}{=} \lim_n \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2\,.$$