Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις Ι

Παράδοση: 19 Μαρτίου 2021

1. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $x, y \in E$, δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) $x \perp y$ (ii) $\|y\| \leq \|\lambda x + y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$ (iii) $\left\|x + e^{i\theta} y\right\| = \left\|x - e^{i\theta} y\right\| \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.

2. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\langle x, y \rangle\rangle|^2 \leq \langle\langle x, x \rangle\rangle \langle\langle y, y \rangle\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

3. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^{\perp}$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.
2) $A^{\perp} = (\overline{\text{span}\, A})^{\perp}$.
3) $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
5) $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.
6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

4. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H και $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

6. Έστω H_s ο χώρος όλων των ακολουθιών $x = (x(n))$ μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν $\sum_n (1 + n^2)|x(n)|^2 < \infty$. Αποδείξτε ότι με τη νόρμα $\|x\|_s := \left(\sum_n (1 + n^2)|x(n)|^2\right)^{1/2}$ ο H_s είναι χώρος Hilbert.

Δείξτε επίσης ότι $c_{00} \subseteq H_s \subseteq \ell^2$.

Είναι ο H_s κλειστός στον ℓ^2;

7. Ο χώρος του Hardy H^2 αποτελείται από όλες τις δυναμοσειρές $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ που ικανοποιούν $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ (παρατηρείστε ότι μια τέτοια δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $|z| < 1$).
Αν επίσης $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in H^2$, θέτουμε $\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ όπου $\zeta_k(z) = z^k, k = 0, 1, \ldots$ είναι ορθοκανονική βάση του H^2. Να συμπεράνετε ότι ο H^2 είναι χώρος Hilbert.

Αν $|w| < 1$, δείξτε ότι η $\phi_w : f \longrightarrow f(w)$ είναι γραμμική μορφή στον H^2 και είναι συνεχής.

Βρείτε την (μοναδική) $k_w \in H^2$ που ικανοποιεί $\langle f, k_w \rangle = \phi_w(f)$ για κάθε $f \in H^2$.

8. Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0,1])$.

9. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $f \in C([0,1])$ να ισχύει η ανισότητα

$$\left| \int_0^1 t f(t) dt \right| \leq C \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} .$$

Βρείτε την βέλτιστη (δηλ. την μικρότερη δυνατή) τιμή της C.

10. Στον χώρο $M_n = M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων, ορίζουμε

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(B^* A), \; A, B \in M_n$$

(εδώ $[b_{ij}]^* = [\bar{b}_{ji}]$). Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο. Γενικότερα, αν $\rho \in M_n$ και θέσουμε $\langle A, B \rangle_\rho := \text{Tr}(\rho B^* A), \; A, B \in M_n$, πότε είναι το $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ εσωτερικό γινόμενο στον M_n;

11. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

• Ο συζυγής: $(vu^*)^* = uv^*$

• Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0?

• Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}, \; u_k \in E, v_k \in F$.

• Μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F.

• Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές?