Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Εαρινό Εξάμηνο 2020-21

Περιεχόμενα

Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ?

Παράδειγμα 1. $T : f \to a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ οι a_i είναι «καλές» συναρτήσεις).
Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$.

Παράδειγμα 2. $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{C}, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$

Παράδειγμα 3. $T : f \to (Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$: ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π-περιοδική)
Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n) f_n \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T διαγωνοποιήθηκε!

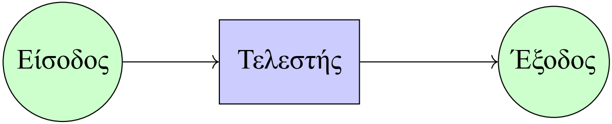
$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Γιατί; Γιατί είναι ορθοκανονική. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγει. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

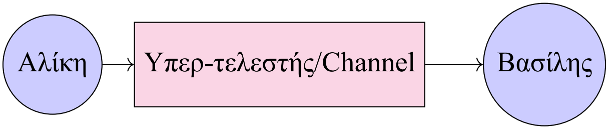
Alice και Bob

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

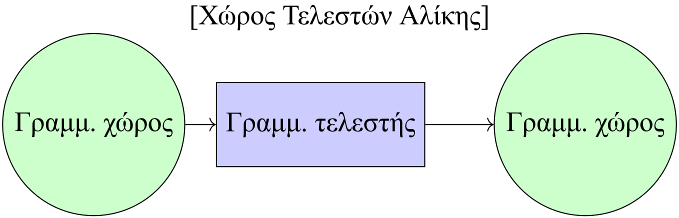
[Εργαστήριο Αλίκης]

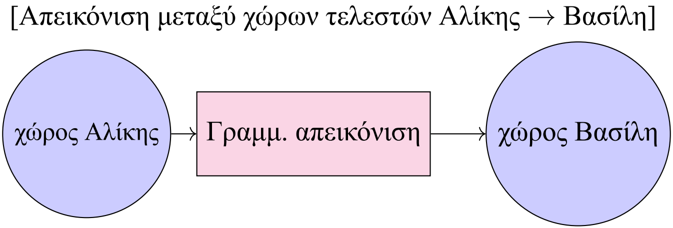


Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές και Υπερτελεστές





Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ ώστε $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το $\mathbb{C}$.

- Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n-αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \ldots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \ldots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \,\forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.
Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00}: κάθε $x = x(n)) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum\limits_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.
Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}.

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας $\operatorname{supp} x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \dots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

• Αν $A \neq \emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f + g,\ \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

• Παράδειγμα: Αν $A = [n] \times [m]$ (εδώ $[n] := \{1, \ldots, n\}$) τότε $\mathbb{K}^A$ είναι ο χώρος των $M_{nm}(\mathbb{K})$ των $n \times m$ πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{K}$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

• Ο χώρος $\mathcal{R}[0,1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.
Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$ όπου $u(t):=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})$, $v(t):=\frac{1}{2i}(f(t)-\overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i\int v(t)dt,$$

Ο $\mathcal{R}[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n |x(n)|^2<\infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Γραμμικοί χώροι

Αν E γραμμικός χώρος και $x \in E$, $A \subseteq E$, λέμε ότι το x ανήκει στην γραμμική θήκη του A (γράφουμε $x \in \mathrm{span}(A)$) ή ότι είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A, αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots . \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα $y_1, \dots, y_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \dots \mu_m \in \mathbb{K}$, όχι όλα 0, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k, δηλαδή αν

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό $M \subseteq E$ λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν περιέχει κάποια $y_1, \dots, y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \backslash \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \backslash \{x\}$.

Το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε πεπερ. πλήθος στοιχείων $x_1, \dots, x_n$ του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ένας $F \subseteq E$ λέγεται (γραμμικός) υπόχωρος του E αν $\mathrm{span}(F) \subseteq F$, δηλαδή αν

$$x, y \in F \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x + \lambda y \in F.$$

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση $T : E \mapsto F$ λέγεται γραμμική αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y) .$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.
Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \mapsto F$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \; \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται ημι–εσωτερικό γινόμενο.
Ένα ημι–εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ ως εξής:
$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x(k)} y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμμιά φορά και χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space).

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $\; d(x,y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach.

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.
Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον $C([a,b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b].$$

Επομένως κάθε $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x,y) := \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2}, \; x,y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E,d)\times(E,d) \to (E,d) : (x,y) \to x+y$$
$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|)\times(E,d) \to (E,d) : (\lambda,x) \to \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E,d)\times(E,d) \to (\mathbb{K},|\cdot|) : (x,y) \to \langle x,y\rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y\rangle = 0,\ \text{τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται κάθετα (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y\rangle = 0$.
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική (orthonormal) αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle ., .\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει[1] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά $\quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\,.$

---

[1] με $[A]$ ή span A θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E.

(α) Το διάνυσμα $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

(β) Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (β))

Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.

Τώρα: $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k \rangle = 0 \ \forall k, \iff$

$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \ \forall k, \iff y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = y_x$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (α))

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

παρατηρούμε ότι $u \perp F$ (γιατί $\langle u, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \ldots n$) και $v \in F$, άρα $v \perp u$. Πυθαγόρειο: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1) \\ &\geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2, \ \text{ισότητα ανν } \langle x, e_k \rangle = \lambda_k \ \forall k \end{aligned}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(i) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (II))

Έστω H χώρος Hilbert, C κλειστό μη κενό κυρτό [2] *(οπότε $u, v \in C \Rightarrow \frac{u+v}{2} \in C$) υποσύνολο του H.*
Υπάρχει μοναδικό $y \in C$ πλησιέστερο προς το 0, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|y\| = \inf\{\|z\| : z \in C\}$.

[2] δηλ. αν $x, y \in C$, για κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M, ώστε $M^{\perp} = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Δηλαδή
$\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_{\perp}$ όπου $y_M \in M$, $y_{\perp} \in M^{\perp}$.

Πυθαγόρειο: $\quad \|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_{\perp}\|^2 \quad \forall y \in H.$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M *κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert* H*. Η απεικόνιση*

$$P_M : H \to H \ : y \to P_M(y)$$

όπου $P_M(y) \in M$ *και* $y - P_M(y) \in M^\perp$ *είναι γραμμική και συνεχής.*

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^\perp = H$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα (αφού $P_M(y) \perp y - P_M(y) \in M^\perp$):

$$\|P_M(y)\|^2 + \|y - P_M(y)\|^2 = \|y\|^2$$

$$\text{άρα} \qquad \|P_M(y)\| \leq \|y\|$$

οπότε, αν $y_n \to y$ έχουμε
$\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \to 0.$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert:
$A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{span}(A)$ πυκνός στον H.

Ισοδύναμα Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου *Hilbert* H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5. $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6. Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
7. Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E *χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν* $x \in E$*, ονομάζουμε* f_x *την απεικόνιση*

$$f_x : E \to \mathbb{K} \, : \, y \to \langle y, x \rangle .$$

Η f_x *είναι γραμμική και συνεχής.*

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H *χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή* $f : H \to \mathbb{K}$ *υπάρχει μοναδικό* $x \in H$ *ώστε* $f = f_x$*, δηλαδή*

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; y \in H .$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \neq 0$.

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\mathrm{span}(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν

(i) είναι ορθοκανονική και

(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση.

2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\mathrm{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.

3. Στον χώρο $(C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt}$ είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η $\{f_m\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του $(C([-\pi, \pi), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε $f \in (C([-\pi, \pi)$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η $\{f_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(C([-\pi, \pi), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H. Η $\mathcal{C}$ είναι ο.κ. βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathcal{C}$ είναι το 0.

Παρατήρηση

Κάθε χώρος με εσωτερικό γινόμενο περιέχει ένα μεγιστικό ορθοκανονικό σύνολο. Αν ο χώρος είναι πλήρης, το σύνολο αυτό είναι αναγκαστικά ορθοκανονική βάση.
Υπάρχει όμως παράδειγμα χώρου με εσωτερικό γινόμενο που δεν έχει ορθοκανονική βάση.

Τα πράγματα είναι απλούστερα σε διαχωρίσιμους χώρους: (Δηλ. που περιέχουν ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.)

Ορθοκανονικές Βάσεις

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος χώρος E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F (π.χ. $E = C([0,1])$ και $F =$ πολυώνυμα).

Άσκηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \text{ αν και μόνον αν } x \in \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \operatorname{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Μισή Απόδειξη Έστω $x \in \overline{K}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως, πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

(Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης). Αλλά ξέρουμε (Πυθαγόρειο, δες την (2)) ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 . \quad \rightsquigarrow$$

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2$$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k\rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Συνέπεια:

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο* E *με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε* $x \in E$,

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του* E*).*

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ *(Ισότητα Parseval).*

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο* E*, για κάθε* $x, y \in E$ *έχουμε*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, e_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος[3] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H, η απεικόνιση

$$U : H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \ell^2 \; : \; x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

[3] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση* $\phi : E \to H$ *με πυκνή εικόνα.*

Ο H *είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν* $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *είναι χώρος Hilbert και* $\psi : E \to K$ γραμμική ισομετρία *με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία* T *από τον* H επί *του* K *ώστε* $T(\phi(x)) = \psi(x)$ *για κάθε* $x \in E$.

Ο χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *λέγεται* ***η πλήρωση*** *του* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, two heads, "\phi"] \arrow[d, tail, two heads, "\mathrm{id}"] & \phi(E) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads, dashed] & H = \overline{\phi(E)} \arrow[d, tail, two heads, "T"] \\
E \arrow[r, tail, two heads, "\psi"'] & \psi(E) \arrow[r, tail] & K = \overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}
$$

Δείτε και το αρχείο complun.pdf.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ όπου
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$
Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$
(όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$).
Θέτω $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt.$
Ονομάζω $L^2(\mathbb{R})$ την πλήρωση του F.

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι ορισμοί των χώρων Hilbert $L^2([a,b])$ και $L^2(\mathbb{R})$.

Ενημερωτικά παρατίθενται στις επόμενες δυο διαφάνειες οι (ισοδύναμοι) ορισμοί με χρήση Θεωρίας Μέτρου.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\displaystyle\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\displaystyle\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σχ. παντού $\iff$ $f - g \in \mathcal{N}$.
Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2$.
Θέτω $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.
Έπεται ότι ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ-σχ. παντού.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f+\mathcal{N}, g+\mathcal{N}\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο $C([a,b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a,b],\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.
(Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(\Gamma)$)

Συμβολισμός: $\ell^2(n) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Όποιος ενδιαφέρεται για τον $\ell^2(\Gamma)$ ας δεί το αρχείο nonsep.pdf.

Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

Ορισμός

Αν E, F είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε $\mathcal{L}(E, F)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$. Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{L}(E)$ αντί για $\mathcal{L}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{L}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων $\{e_1, \ldots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \ldots, f_n\}$ του F ορίζει ισομορφισμούς $V : E \to \mathbb{K}^m$, $W : F \to \mathbb{K}^n$, οπότε ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \left\langle \tilde{T}_A e_k, f_i \right\rangle, i = 1, \ldots n, k = 1, \ldots m.$$

Πίνακες και Τελεστές

Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα $A_T = [a_{ik}]$ από την σχέση $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$.

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F) : A \to T_A$ είναι 1-1, επί και γραμμική.

Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, η απεικόνιση $T \to \langle Te_k, f_i \rangle$ είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο $\mathcal{L}(E, F)$ στον γραμμ. χώρο $M_{nm}(\mathbb{K})$.
Όταν $n = m$, απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικότερα όταν ορίζεται η σύνθεση).

Σύνθεση $\rightsquigarrow$ γινόμενο πινάκων: Αν επίσης ένας G έχει ορθοκανονική βάση $\{g_1, \dots, g_k\}$, και $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ είναι γραμμικές με
$T \rightsquigarrow [a_{ij}] \in M_{nm}$ και $S \rightsquigarrow [b_{ij}] \in M_{mk}$ τότε
$ST := S \circ T \rightsquigarrow [c_{ij}] \in M_{nk}$ όπου $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$.

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$.
Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x \rangle = \langle y, T_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.
Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } \ x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Πίνακες και Τελεστές

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο* *πεπερασμένης διάστασης*, *και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } \ x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα A_T. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \ \ (TR)^* = R^* T^*, \ \ T^{**} = T.$$

Τελεστές πρώτης τάξης

Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Άσκηση

• Ο συζυγής: $(vu^*)^* = uv^*$

• Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0;

• Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^{N} s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}$, $u_k \in E, v_k \in F$.

• Μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική βάση στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική βάση στον F.

• Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές βάσεις;

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

$$\|Tx - Tx'\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \overset{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \, \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T *είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \to F \quad \textit{δηλ.}\ \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Απόδειξη στο αρχείο extend21.pdf

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 *είναι δύο χώροι Hilbert και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ *ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του* T*. Είναι φραγμένος τελεστής και* $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.

(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),
η $T \to T^* : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i \rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n),\ \ a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

• Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i\rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i\rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{για κάθε } \ x \in \ell^2 \,.$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a,b]), \|\cdot\|_2) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x,y)|^2 dx dy$.
Άρα επεκτείνεται σε $T_k : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε
$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$
(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και
$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).
Ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή
$M_f^* = M_{f^*}$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.
Ο συζυγής του U είναι ο V. Άρα $UU^* = U^*U = I$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ \ (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $T = S^*$.
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

$$
\begin{aligned}
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}): \ Ue_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \\
U^*e_n &= e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+): \ Se_n &= e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \ \ (n \in \mathbb{Z}_+) \\
S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad (\text{μετατόπιση αριστερά})
\end{aligned}
$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων [4] ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0,1])$ του $L^2([0,1])$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2([0,1])$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$ για κάθε $f \in C^1([0,1])$.

[4] Δηλ. των $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0,1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E, F)$.
Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach.

Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$. Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$.

Ορισμός

Ο (τοπολογικός) δυικός (dual) E^* ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών $f : E \to \mathbb{K}$, δηλαδή ο $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$. Είναι πάντα χώρος Banach.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Παράδειγμα $\phi(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in B_1(H_1), y \in B_2(H_2)\}\end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \left\langle Te_j, f_i \right\rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j\right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \leq 1\right\}$$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη ανν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H. Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

αν $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ισχύει η ισότητα $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\}$.

... αλλά όχι εν γένει.

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $T = T^*$, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).
Ο τελεστής $M : H^2 \to H^2$ όπου $(Mf)(z) = zf(z),\ f \in H^2$ είναι ισομετρία, όχι επί (άσκηση).

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.
Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.
(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ είναι αυτομάτως θετικός.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \ \Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0$, $\lambda \in [0,1] \ \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \ \Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h \ \ \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$-κλειστός.

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B,\, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Αν $A = A^*$ τότε $-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$

άρα $A = (A + \|A\|I) - \|A\|I$ (διαφορά δύο θετικών)

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$. Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$.

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ *υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$. *Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ *μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον* A.

Πόρισμα

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ *είναι θετικοί τελεστές, τότε ο* AB *είναι θετικός αν και μόνον αν* $AB = BA$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \to Tx$ και να επεκτείνεις...

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο* P *είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

(δ) *Ο* P *είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*

(ε) *Ο* P *είναι φυσιολογικός.*

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή
αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

(Αποδείξεις των δυο προτάσεων υπάρχουν στο αρχείο prob21.pdf.)

Προβολές

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

(α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.

(β) Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και
$x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$.

(γ) Αν P ορθή προβολή, τότε $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$ και
$Py = y \iff \|Py\| = \|y\|$.

Πρόταση (Η απεικόνιση $P \to \operatorname{im} P$ διατηρεί τη διάταξη)

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $P \leq Q$ *(β)* $\|Px\| \leq \|Qx\|$ *για κάθε* $x \in H$

(γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ *(δ)* $QP = P$ *(ε)* $PQ = P$.

Προβολές

Πρόταση

Αν M, N *είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert* H *και* $P = P(M), Q = P(N)$ *είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε*

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ *είναι προβολή αν και μόνον αν* $PQ = QP$*. Τότε* $R = P(M \cap N)$*.*

(i') Ειδικότερα,

$$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0.$$

(ii) Ο τελεστής $S = P + Q$ *είναι προβολή αν και μόνον αν* $M \perp N$*. Τότε* $S = P(M + N)$*.*

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

Συμβολισμοί:
$$\begin{aligned} P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.
(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)
(β) αν $M \perp N$, τότε $M + N$ κλειστός (γνωστό: από το Πυθαγόρειο...).
(γ) Αν $M = \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, τότε (M, N κλειστοί αλλά) $M + N$ όχι κλειστός. (ασκ.)

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) *είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο*[5] *στην προβολή* $Q = P(M)$, *όπου* M *είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των* $\operatorname{im} Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.

Πρόταση

Έστω (P_n) *ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert* H.

(i) Αν οι P_n *είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά* $\sum_n P_n x$ *συγκλίνει για κάθε* $x \in H$, *και* $\sum_n P_n x = P(M)x$, *όπου* M *είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των* $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Για κάθε $x \in H$ *ισχύει* $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

(ii) Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ *για κάθε* $x \in H$, *τότε οι* P_n *είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i).*

[5] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

(iii) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.*

(iv) $\sum_{n} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ *για κάθε $x \in H$.*

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Απόδειξη στο αρχείο orthproj.pdf.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι αναλλοίωτος (invariant) από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος.
Όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος E ανάγει (reduces) τον A.
Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (όπου $P = P_E$). Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Δες και το αρχείο invtn.pdf στην η-τάξη.

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Παρατήρηση Αν $x \in H$, ο υπόχωρος $E_x = \overline{\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$ είναι A-αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν λοιπόν ο χώρος H *δεν* είναι διαχωρίσιμος και $x \neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος (δηλ. $\neq \{0\}, \neq H$).
Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A-αναλλοίωτος. Αν ο H είναι *μιγαδικός* χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.
Άρα, και στις δυο αυτές περιπτώσεις, κάθε φραγμένος τελεστής έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.
Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert H (ισοδύναμα, στον ℓ^2) έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο;

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι

Απάντηση: Άγνωστο, ακόμα και για *αυτοπαθείς* χώρους Banach. Για γενικούς χώρους Banach, όχι πάντα.

• Το πρώτο παράδειγμα τελεστή χωρίς αναλλοίωτο υπόχωρο ($\sim$1975): P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.

• Στον ℓ_1: C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

• Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).

• Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

• Και ένα σχετικό video: Eva Gallardo Gutiérrez: The invariant subspace problem: a concrete operator theory approach.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \to E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή (eigenvalue) της A αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) της A και το σύνολο

$$M_\lambda := \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο ιδιόχωρος (eigenspace) της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \to E$ έχει ιδιοτιμές.
Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.
Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}\,(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.
Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

(β) Στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ θεωρούμε τον τελεστή $U : e_n \mapsto e_{n+1}\,(n \in \mathbb{Z})$. Ο U δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο U^* έχει ιδιοτιμές.

(γ) Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή M με $(Mf)(t) = tf(t)\,(f \in C([0,1]))$. Ο M δεν έχει ιδιοτιμές. (Ασκ.)
Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable) αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = \{a(n)\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = \{a(n)\}$ φραγμένη και

$$A = U^{-1} D_a U : \qquad A \overset{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \to \ell^2 : x_n \to e_n$ είναι unitary. Άρα
διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός.

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Πρόταση

Έστω H *διαχωρίσιμος χώρος Hilbert,* $A \in \mathcal{B}(H)$. *Ο* A *είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν οι ιδιόχωροι του είναι ανά δυο κάθετοι και παράγουν τον* H.

Το σύνολο $\sigma_p(A)$ *των ιδιοτιμών ενός διαγωνοποιήσιμου τελεστή είναι (πεπερασμένο ή) αριθμήσιμο. Αν* $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι μια αρίθμηση του* $\sigma_p(A)$ *και* P_n *είναι η προβολή στον ιδιόχωρο* M_n *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* λ_n, *τότε για κάθε* $x \in H$

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

(όπου το άθροισμα συγκλίνει (αν είναι άπειρο) ως προς τη νόρμα τουH.

Ένα παράδειγμα

Έστω g συνεχής συνάρτηση, 2π-περιοδική, $H = L^2([0,2\pi])$,
$T : H \to H : f \mapsto Tf$ όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$$

ολοκληρωτικός τελεστής
Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T διαγωνοποιήθηκε!

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0,2\pi])$.

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Λήμμα

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *φυσιολογικός τελεστής. Αν* $x \in \mathcal{H}$ *είναι ιδιοδιάνυσμα του* T *με ιδιοτιμή* λ*, τότε* $T^* x = \bar{\lambda} x$*.*
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T *σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ *είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ *του* $\mathcal{H}$ *και* $a_k \in \mathbb{C}$ *ώστε* $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$*.*
Ισοδύναμα, ο T *είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής* $U : \mathcal{H} \to \ell^2([n])$ *ώστε ο* UTU^{-1} *να είναι διαγώνιος.*

Συμπλήρωμα: Τριγωνοποιήσιμοι Τελεστές

Πρόταση

Αν H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ έχει μια μεγιστική αλυσίδα από αναλλοίωτους υποχώρους: Υπάρχουν υπόχωροι

$$\{0\} \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq H$$

ώστε $T(M_k) \subseteq M_k$ *και* $\dim M_k = k$ *για κάθε* $k = 1, \dots, n-1$.

Συνεπώς υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{x_1, \dots, x_n\}$ *του* H *ως προς την οποία ο πίνακας του* T *είναι άνω τριγωνικός, και άρα τα διαγώνια στοιχεία του,* $\langle Tx_k, x_k \rangle$, $k = 1, \dots, n$, *είναι οι ιδιοτιμές του* T.

Απόδειξη στο trig.pdf

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \operatorname{im} T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\operatorname{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \operatorname{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $v \in K$ και $u \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \to K$$

$$\text{από τον τύπο} \quad vu^*(x) = \langle x, u \rangle v \quad (x \in H).$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$vu^* = \Theta_{u,v} = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Ο τελεστής vu^* είναι φραγμένος, και $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$.
Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ πρώτης τάξης ($\operatorname{rank}(T) = 1$) είναι αυτής της μορφής (με u, v μη μηδενικά).

Κάθε $A \in \mathcal{F}(H, K)$ γράφεται $A = \sum_{k=1}^{n} s_k f_k e_k^*$ όπου $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^\perp = (\ker A^*A)^\perp$ ώστε $(A^*A)e_k = s_k^2 e_k$ και $\{f_k := \frac{Ae_k}{s_k}\}$ ορθοκανονική βάση του $\operatorname{im} A$.

Ισχύει $A^* = \sum_{k=1}^{n} s_k e_k f_k^*$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των $(\ker T)^{\perp} = \operatorname{im} T^*$ και $T(E) = \operatorname{im} T$):
Ως προς τις διασπάσεις $H = (\ker T)^{\perp} \oplus \ker T$ και
$K = \operatorname{im} T \oplus (\operatorname{im} T)^{\perp}$ ο T γράφεται

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τοπολογική ιδιότητα: Αν $A \in \mathcal{F}(H, K)$, τότε το $A(B_H)$ είναι (σχετικά) συμπαγές στον K.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.
Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Παράδειγμα

Αν $a = (a_n) \in c_0$, ο τελεστής $D_a = \mathrm{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F).$$

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K.*
3. *Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).*
4. *Ο $(K, \rho|_K)$ είναι ολικά φραγμένος (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) και πλήρης.*

Παρατήρηση Σε πλήρη μετρ. χώρο X, ένα $A \subseteq X$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλ. $\overline{A}$ συμπαγές) ανν είναι ολικά φραγμένο.

Συμπαγείς Τελεστές

Θεώρημα

Έστω E, F *χώροι Banach,* $T : E \to F$ *γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T *είναι συμπαγής.*

(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$*, το* $\overline{T(A)}$ *είναι συμπαγές.*

(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ *του* E*, η ακολουθία* $\{Tx_n\}$ *έχει* $\|\cdot\|$*-συγκλίνουσα υπακολουθία.*

(iv) Το σύνολο $T(B_E)$ *είναι ολικά φραγμένο.*

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T,S \in \mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Λήμμα

Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach,

$$\begin{aligned} & B \in \mathcal{B}(M,E),\ X \in \mathcal{K}(E,F) \ \textit{και} \ A \in \mathcal{B}(F,N) \\ \Longrightarrow \quad & XB \in \mathcal{K}(M,F) \quad \textit{και} \quad AX \in \mathcal{K}(E,N) \end{aligned}$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \to 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση: Ειδικότερα το $\mathcal{K}(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(E)$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H *είναι χώρος Hilbert και* $T \in \mathcal{B}(H)$*, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο T *είναι συμπαγής.*
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ *του* H*, ισχύει* $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ *από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε* $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω H, K *χώροι Hilbert και* $A \in \mathcal{B}(H, K)$*. Ο* A *είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{F}(H, K)$ *και* $C \in \mathcal{B}(H, K)$ *ώστε* $\|C\| < \epsilon$ *και* $A = B + C$*. Λέμε ότι «ο* A *είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».*

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach
(Per Enflo, Acta Math., **130** (1973).

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Πρόταση

Έστω H, K *χώροι Hilbert και* $T \in \mathcal{B}(H, K)$. *Ο* T *είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία* $\{x_n\}$ *του* H, *η ακολουθία* (Tx_n) *συγκλίνει ως προς την* $\|\cdot\|_K$.

Ορισμός

Μια ακολουθία (u_n) σε έναν χώρο Hilbert H συγκλίνει ασθενώς σε ένα $u \in H$ αν για κάθε $v \in H$ ισχύει $\lim_n \langle u_n, v\rangle = \langle u_n, v\rangle$.

Πρόταση

Αν H, K *είναι χώροι Hilbert και* $T \in \mathcal{B}(H, K)$, *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T *είναι συμπαγής.*

(ii) Για κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία (u_n) *του* H, *η ακολουθία* (Tu_n) *είναι* $\|\cdot\|_K$*-συγκλίνουσα.*

(iii) Για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία (v_n) *του* H *ισχύει ότι* $\|Tu_n\|_K \to 0$.

Συμπαγείς Τελεστές

Πρόταση

Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \to K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\operatorname{im} A}$ και $(\ker A)^{\perp}$ είναι διαχωρίσιμοι.

Αποδείξεις στο compactness.pdf

Πρόταση

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$ τότε

$$T \in \mathcal{K}(H, K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K, H).$$

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Αν $(A_k f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy$ προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης.

(Δες και το αρχείο hscomp18.pdf)

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Θεώρημα

Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert[6] *H και*
$\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$,
ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y \tag{3}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$,
ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Το Θεώρημα έπεται από τα επόμενα δύο Λήμματα.

Για τις αποδείξεις, δείτε το αρχείο fred21.pdf.

[6] Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Λήμμα

Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.

Δείτε σχετικά και την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα συζήτηση για το θέμα στο blog του Terence Tao
a-proof-of-the-fredholm-alternative

Το Φάσμα

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο }\}.$$

Η επόμενη Πρόταση είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος στην προηγούμενη διαφάνεια

Πρόταση

Το $\sigma(A)$ φράσσεται από $\|A\|$: Αν $|\lambda| > \|A\|$, ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^{n}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Φάσμα συμπαγούς τελεστή

Πρόταση

Αν H *είναι χώρος Hilbert,* $A \in \mathcal{K}(H)$ *και* $\epsilon > 0$*, δεν υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του* A *που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές* λ *του* A *με* $|\lambda| \geq \epsilon$*.*

Πρόταση

Αν H *είναι χώρος Hilbert και* $A \in \mathcal{K}(H)$ *το σύνολο* $\sigma(A)\backslash\{0\}$ *αποτελείται μόνον από ιδιοτιμές του* A *και, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Το Φάσμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(E)$ (όπου E χώρος Banach).

Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A (συμβ. $\lambda \in \sigma_p(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει $x \in E \setminus \{0\}$ ώστε $(A - \lambda I)x = 0$.

Το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A (συμβ. $\lambda \in \sigma_a(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq E$ με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.
Ισοδύναμα, $\lambda \notin \sigma_a(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in E$.

Προφανώς
$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A) \subseteq \sigma(A).$$

Το Φάσμα

Έστω H χώρος Hilbert.

Πρόταση

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$. Δηλαδή, αν το λ δεν είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, τότε ο $A - \lambda I$ έχει (φραγμ.) αντίστροφο.

Πρόταση

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε
(α) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
(β) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.
(γ) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$.
Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Το Φάσμα

Έστω H χώρος Hilbert. Υπενθύμιση:

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, τότε κάθε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.
(Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.)

Πόρισμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Άρα, υπάρχει $x \in H$ που *μεγιστοποιεί* τον A, δηλ. $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^{\perp}$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^{\perp}$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^{\perp}$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^{\perp} \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \operatorname{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί $Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.
Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.
(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \quad \text{για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.
(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή)

Ένας τελεστής A *σ' έναν χώρο Hilbert* H *είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία* (x_n) *ιδιοδιανυσμάτων του* A*, με αντίστοιχες ιδιοτιμές* $(a(n))$ *ώστε*

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A-\sum_{n=1}^{N}a(n)P[x_n]\right\|=0 \qquad (\star)$$

(όπου $P[x_n]$ *η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το* x_n*). Τότε η ακολουθία* $(a(n))$*, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.*

Πόρισμα

Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Τότε

$$(i) \qquad \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

$$(ii) \qquad \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}$$

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } \; x \in H\,.$$

Θεώρημα

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$.

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος και της πολικής αναπαράστασης τελεστή.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ *και* p *είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ *και* $A = A^*$ *και* p *είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Δείτε το αρχείο funcalc21.pdf.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ *στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο* $p_1(t) = t$ *στον τελεστή* A*. Επίσης ισχύει* $\Phi_c(p) = p(A)$ *για κάθε πολυώνυμο* p*.*

Ορισμός

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο $f(A) = \lim p_n(A)$ όπου (p_n) πολυώνυμα με $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

Παρατήρηση

Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον $f(A)$.

Πρόταση (Φασματικής Απεικόνισης)

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και $f \in C(\sigma(A))$, τότε

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Πόρισμα

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής.

- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι πάντα φυσιολογικός.*
- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$.*

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

Πρόταση

Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ *είναι θετικός αν και μόνον αν* $A = A^*$ *και* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Πρόταση (Τετραγωνική ρίζα)

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο* A *είναι θετικός.*
2. *Υπάρχει θετικός* $B \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $B^2 = A$.
3. *Υπάρχει* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^* X = A$.

Σχόλια (α) Αποδεικνύεται ότι η θετική τετραγωνική ρίζα $f(A)$ ενός θετικού τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι μοναδική. Γράφουμε $f(A) = A^{1/2}$.

(β) Τονίζουμε ότι η υπόθεση $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ δεν εξασφαλίζει ότι ο A είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Πόρισμα

Κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ *γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών* $A = A_+ - A_-$ *με* $A_+ A_- = A_- A_+ = 0$. *Επομένως κάθε* $T \in \mathcal{B}(H)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.*

Πρόταση

Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ *η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή* A, *όπου* $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι μια αρίθμηση του* $\sigma_p(A)$ *και* $P_n = P(M_{\lambda_n})$.
Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ *είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε*

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.
Όταν η f *είναι συνεχής (και ο* A *αυτοσυζυγής), τότε* $f(A) = A_f$.

Παρατήρηση Ο τελεστής A_f δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα, $A_{\mathrm{Id}} = I_H$). Όταν όμως η ακολουθία $(f(\lambda_n))$ είναι μηδενική, τότε ο A_f είναι συμπαγής ($\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης).