Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

712. Γραμμικοί Τελεστές **10 Φεβρουαρίου 2020**

1. **[1μ]** Αποδείξτε ότι για ένα μη-κενό σύνολο $M \subset \mathcal{H}$ ισχύει $M = M^{\perp\perp}$ αν και μόνο αν το M είναι κλειστός υπόχωρος.

2. **[1μ]** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

3. **[1μ]** Έστω P και Q ορθογώνιες προβολές. (i) Να αποδειχθεί ότι ο τελεστής PQ είναι ορθογώνια προβολή αν και μόνο αν $PQ = QP$. Να δειχθεί ότι τότε $\mathrm{Ran}(PQ) = \mathrm{Ran}(P) \cap \mathrm{Ran}(Q)$.

4. **[1.5μ]** Έστω $h \in C([0,1])$. Να αποδειχθεί ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής M_h είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν $h(x) \geq 0$, $x \in [0,1]$.

5. **[1.5μ]** (i) Να διατυπωθεί το φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές (μία από τις δύο εκδοχές του). (ii) Να αποδειχθεί ότι αν ο A είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής τότε υπάρχει τελεστής B ώστε $B^3 = A$. Είναι ο τελεστής B μοναδικός;

6. **[1.5μ]** Να αποδειχθεί ότι η σχέση

$$(Kf)(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt\,, \qquad f \in C([0,1]),$$

ορίζει έναν φραγμένο τελεστή στον $L^2([0,1])$.

7. **[1.5μ]** Έστω T συμπαγής τελεστής στον $\mathcal{H}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\inf_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = 0.$$

8. **[1.5μ]** Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ συμπαγής τελεστής. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\|Tx\| = \|T\|\,\|x\|$.

9. **[1.5μ]** Δοθέντων δύο διανυσμάτων $a, b \in \mathcal{H}$ να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $a \otimes b^*$, όπου $(a \otimes b^*)x = \langle x, b \rangle a$.

Άριστα = 10 μονάδες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ....

Α.Μ.: ....

Καλή επιτυχία