ΕΚΠΑ - Τμήμα Μαθηματικών
Ακαδ. έτος 2019-20 712. Γραμμικοί Τελεστές

Ασκήσεις.

1. Να δειχθεί ότι κάθε ορθοκανονικό σύνολο σε ένα χώρο εσωτερικού γινομένου είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Έστω $p \geq 1$, $p \neq 2$. Να δειχθεί ότι για τη νόρμα $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$ στον $\mathbb{R}^2$ δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

3. Έστω $n \geq 3$ και $\omega_0, \ldots, \omega_{n-1} \in \mathbb{C}$ οι n-στές ρίζες της μονάδας. Να δειχθεί ότι σε ένα μιγαδικό χώρο εσωτερικού γινομένου το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ανακτηθεί από τη νόρμα με τη σχέση
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \|x + \omega_k y\|^2 , \qquad x, y \in E.$$

4. Έστω $(E, \langle\!\langle , \rangle\!\rangle)$ ένας χώρος ημιεσωτερικού γινομένου.
(α) Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: $|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle|^2 \leq \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle$ για κάθε $x, y \in E$.
(β) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E \ : \ \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.
(γ) Στο σύνολο πηλίκο E/N (το οποίο, ως γνωστό, γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε $[x] + [y] = [x + y]$, $\lambda[x] = [\lambda x]$, όπου $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$) ορίζουμε
$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle , \qquad x, y \in E.$$
Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $\langle , \rangle$ είναι ένα (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

5. (i) Να δειχθεί ότι ο c_{00} με το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$ δεν είναι χώρος Hilbert. (ii) Να δειχθεί ότι ο c_{00} είναι πυκνός υπόχωρος του l^2.

6. Να δειχθεί ότι αν ένας χώρος Hilbert έχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση τότε είναι διαχωρίσιμος.

7. Να δειχθεί ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert άπειρης διάστασης είναι ισόμορφος με τον l^2.

8. Να δειχθεί ότι δύο διανύσματα x, y ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ είναι κάθετα μεταξύ τους αν και μόνο αν $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$.

9. Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. (i) Να δειχθεί ότι αν $M \perp N$ τότε ο $M + N$ είναι κλειστός υπόχωρος. (ii) Γενικότερα, να δειχθεί ότι αν υπάρχει $\lambda < 1$ ώστε $|\langle x, y \rangle| \leq \lambda \|x\| \, \|y\|$ για κάθε $x \in M$ και $y \in N$ τότε ο $M + N$ είναι κλειστός υπόχωρος.

10. Έστω M και N κλειστοί υπόχωροι του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Να δειχθεί ότι
$$\text{(i)} \qquad (M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp} , \qquad \text{(ii)} \qquad (M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}.$$

11. Έστω π το γραμμικό συναρτησιακό (= γραμμικός τελεστής με πεδίο τιμών το σώμα $\mathbb{K}$) από το χώρο $C([-1,1])$ (με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο) στο $\mathbb{K}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\pi(f) = f(0).$$

Αν εξεταστεί αν το π είναι φραγμένο.

12. Να δειχθεί ότι ο τελεστής A στον $C([0,1])$, όπου

$$(Af)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}dt \ , \qquad f \in C([0,1]),$$

επεκτείνεται σε ένα φραγμένο τελεστή στον $L^2([0,1])$.

13. Έστω E_1, E_2 δύο χώροι Hilbert. Να δειχθεί ότι το καρτεσιανό γινόμενο $E_1 \times E_2$ γίνεται χώρος Hilbert αν ορίσουμε κατάλληλα (πώς;) την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό και στη συνέχεια ορίσουμε

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle_{E_1} + \langle x_2, y_2 \rangle_{E_2} \qquad (x_1, y_1 \in E_1 \, , x_2, y_2 \in E_2).$$

[Ο χώρος αυτός ονομάζεται ευθύ άθροισμα των E_1, E_2 και συμβολίζεται με $E_1 \oplus E_2$. Κάθε ένας από τους E_1, E_2 μπορεί να θεωρηθεί ως υπόχωρος του $E_1 \oplus E_2$ αν ταυτίσουμε τα στοιχεία $(x_1, 0)$ και $(0, x_2)$ με τα x_1 και x_2 αντίστοιχα ($x_i \in E_i$), οπότε ο συμβολισμός είναι συμβατός με το γνωστό συμβολισμό για το ευθύ άθροισμα υποχώρων. Για το λόγο αυτό γράφουμε συχνά $x_1 \oplus x_2$ αντί του (x_1, x_2).]

14. (∗) Γενικεύστε το παραπάνω ορίζοντας το άπειρο (αριθμήσιμο) ευθύ άθροισμα $\oplus_{n=1}^{\infty} E_n$ των χώρων Hilbert $E_1, E_2, \ldots$. Αποδείξτε ότι αν κάθε E_n είναι διαχωρίσιμος τότε και ο $\oplus_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι διαχωρίσιμος. [Ο ορισμός και ο τρόπος χειρισμού του $\oplus_{n=1}^{\infty} E_n$ έχει πολλά κοινά με τον χώρο $l^2(\mathbb{N})$]

15. Έστω P και Q οι ορθογώνιες προβολές πάνω στους κλειστούς υποχώρους M και N αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \langle Px, x \rangle \leq \langle Qx, x \rangle \ , \quad x \in \mathcal{H} \\ \text{(ii)} & \|Px\| \leq \|Qx\| \ , \quad x \in \mathcal{H} \\ \text{(iii)} & PQ = QP = P \\ \text{(iv)} & M \subset N. \end{array}$$

16. (i) Έστω $a = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$ και D_a ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής στον l^2. Να δειχθεί ότι η εικόνα $\mathrm{Ran}(D_a)$ δεν είναι κλειστό σύνολο.
(ii) Στον χώρο $l^2 \oplus l^2$ θεωρούμε τους υπόχωρους

$$\begin{aligned} M &= \{x \oplus 0 \ : \ x \in l^2\} \\ N &= \{y \oplus D_a y \ : \ y \in l^2\} \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι οι M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του $l^2 \oplus l^2$ αλλά ο $M + N$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος.

17. (i) Λέμε ότι μία ακολουθία $(x_n) \subset \mathcal{H}$ συγκλίνει ασθενώς στο $x \in \mathcal{H}$ αν

$$\langle x_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle \ , \qquad \text{για κάθε } y \in \mathcal{H}\,.$$

Δείξτε ότι η ασθενής σύγκλιση δεν συνεπάγεται την συνήθη (κατά νόρμα) σύγκλιση.
(ii) Λέμε ότι μία ακολουθία τελεστών $(T_n) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ συγκλίνει στον $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ισχυρά αν

$$T_n x \longrightarrow Tx \ , \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}\,.$$

και λέμε ότι συγκλίνει ασθενώς αν

$$\langle T_n x, y\rangle \longrightarrow \langle Tx, y\rangle \ , \qquad \text{για κάθε } x, y \in \mathcal{H}\,.$$

Δείξτε ότι η ασθενής σύγκλιση δεν συνεπάγεται την ισχυρή σύγκλιση κι ότι η ισχυρή σύγκλιση δεν συνεπάγεται τη συνήθη (κατά νόρμα) σύγκλιση.

18. Έστω $y \in \mathcal{H}$ και π το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό

$$\pi(x) = \langle x, y\rangle \ , \quad x \in \mathcal{H}\,.$$

Να βρεθούν οι τελεστές π^*, $\pi^*\pi$ και $\pi\pi^*$.

19. Δοθέντων δύο διανυσμάτων $y, z \in \mathcal{H}$ συμβολίζουμε με $y \otimes z^*$ των τελεστή

$$(x \otimes y^*)z = \langle z, y\rangle x \ , \qquad z \in \mathcal{H}.$$

Να δειχθεί ότι αν ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ έχει πεπερασμένη τάξη (δηλαδή $\dim(\mathrm{Ran}(T)) < +\infty$) τότε έχει τη μορφή

$$T = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k^*$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και κάποια διανύσματα $x_k, y_k \in \mathcal{H}$, $k = 1, \ldots, n$.

20. Έστω P και Q δύο ορθογώνιες προβολές σε έναν χώρο Hilbert. Να δειχθεί ότι ο $P + Q$ είναι ορθογώνια προβολή αν και μόνο αν $P + Q \leq I$.

21. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του ολοκληρωτικού τελεστή K στον $L^2([0,1])$ όπου

$$(Kf)(x) = \int_0^1 (x + y)f(y)dy \ , \qquad f \in C([0,1]).$$

22. Έστω $a = (a_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$. Να δειχθεί ότι ο τελεστής D_a στον $l^2(\mathbb{N})$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν η ακολουθία a είναι μηδενική. *Υπόδειξη. Για τη μία κατεύθυνση προσεγγίστε τον D_a από ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης.*

23. Αποδείξτε ότι σε έναν χώρο άπειρης διάστασης ο χώρος $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ δεν είναι κλειστός ως προς την ισχυρή σύγκλιση.

Συμπληρωματικές ασκήσεις.

1. Να δειχθεί ότι για κάθε μη-κενό υποσύνολο A ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ ισχύει $A^\perp = (\overline{\mathrm{span}(A)})^\perp$.

2. Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών με την ιδιότητα ότι για κάθε $x = (x_n) \in l^2(\mathbb{N})$ ισχύει $(a_n x_n) \in l^2(\mathbb{N})$. Να δειχθεί ότι η (a_n) είναι φραγμένη.

3. Έστω Γ τυχόν μη-κενό σύνολο. Ορίζουμε το διανυσματικό χώρο
$$l^2(\Gamma) = \{x : \Gamma \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)|^2 < +\infty\}$$
(άρα για κάθε $x \in l^2(\Gamma)$ το σύνολο $\mathrm{supp}(x) = \{\gamma \in \Gamma \ : \ x(\gamma) \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο) και τον εφοδιάζουμε με το εσωτερικό γινόμενο
$$\langle x, y\rangle_{l^2(\Gamma)} = \sum_{\gamma\in\Gamma} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}\ .$$
(α) Δείξτε ότι ο
$$c_{00}(\Gamma) = \{x \in l^2(\Gamma) \ : \ \mathrm{supp}(x) \text{ πεπερασμένο σύνολο } \}$$
είναι πυκνός υπόχωρος του $l^2(\Gamma)$.
(β) Βρείτε μία ορθοκανονική βάση του $l^2(\Gamma)$. Συμπεράνατε ότι υπάρχουν μη διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert.

4. Έστω $L^2(\mathbb{R}, e^{-t})$ η πλήρωση του χώρου
$$E = \big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ συνεχής και } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-t} dt < +\infty\big\}$$
με το εσωτερικό γινόμενο
$$\langle f, g\rangle_* = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}e^{-t}dt.$$
Στον $L^2(\mathbb{R}, e^{-t})$ θεωρούμε τον τελεστή $(Tf)(t) = f(t+1)$. Να βρεθοούν οι τελεστές T^* και T^*T καθώς και η $\|T\|$.

5. Αποδείξτε ότι αν ο $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι συμπαγής τότε και ο K^* είναι συμπαγής. *Υπόδειξη. Ο KK^* είναι συμπαγής.*

6. Αποδείξτε ότι ο χώρος $C^\infty([0,1])$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^2([0,1])$. *Υπόδειξη. Αναζητείστε και θεωρείστε δεδομένο το θέωρημα Bolzano-Weierstrass.*

7. Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ ο τελεστής (σε block μορφή)
$$T = \begin{pmatrix} I & A \\ A^* & I \end{pmatrix}$$
Να δειχθεί ότι ο T είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν $\|A\| \leq 1$.

8. Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ συμπαγής τελεστές. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\|Tx\| = \|T\|\,\|x\|$. *Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε το ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{H}$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*