# 712. Γραμμικοί Τελεστές (πολύ πρόχειρες σημειώσεις)

Γ. Μπαρμπάτης

8 Ιανουαρίου 2020

*Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν με σκοπό τη διευκόλυνση του διδάσκοντα και όχι την ανάρτηση στην η-Τάξη. Ωστόσο τελικά αναρτώνται θεωρώντας ότι μπορεί να είναι χρήσιμες σε όσους παρακολουθούν το μάθημα. Υπάρχουν πολλές ελλείψεις και άγνωστος αριθμός λαθών. Δεν θεωρούνται σημειώσεις από τις οποίες μπορεί κανείς να διαβάσει το μάθημα χωρίς σημειώσεις από τις παραδόσεις.*

*Παρακαλείστε να ενημερώνετε το διδάσκοντα για τα λάθη που θα βρίσκετε.*

# Περιεχόμενα

# 1 Γραμμικοί χώροι

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in E$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists\, \vec{0} \in E$ ώστε $\forall\, x \in E$, $\vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in E\ \exists\, (-x) \in E$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in E$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

### Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

• Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{K}^n$ που αποτελείται από όλες τις $n$-αδες στοιχείων του $\mathbb{K}$,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{K}^n$ ως διανύσματα-στήλες

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, \ldots, x_n]^T .$$

(το σύμβολο $T$ σημαίνει «ανάστροφος» ).

• Ο χώρος $c_{00} = c_{00}(\mathbb{N})$:

$$c_{00} := \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{K} \text{ τ.ω. } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ με } x_n = 0\ \forall n > n_0\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη.

Έστω $e_m = (\delta_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $\delta_{mn} = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_{mn} = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον $c_{00}$: κάθε $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum\limits_{m=1}^{n_x} x_m e_m$.

Λέμε ότι η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι αλγεβρική βάση (ή βάση Hamel) του $c_{00}$.

• Το σύνολο $\mathcal{S}$ όλων των ακολουθιών αριθμών στο $\mathbb{K}$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$(x+y)_n = x_n + y_n \quad , \quad (\lambda x)_n = \lambda x_n$$

για $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

• Έστω $A \neq \emptyset$ σύνολο και $\mathbb{K}^A$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{K}$. Το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g,\ \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad t \in A.$$

(Παρατήρηση. $\mathcal{S} = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

• Ο χώρος $\mathcal{R}[0,1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{C}$.

Κάθε συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f = u + iv$ όπου $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$, $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η $f$ λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι $u$ και $v$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 u(t)dt + i\int_0^1 v(t)dt,$$

Ο $\mathcal{R}[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $l^p = l^p(\mathbb{N})$ ο οποίος αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών για τις οποίες $\sum_n |x_n|^p < \infty$ είναι γραμμικός χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

**Ορισμός 1.0.1** *Γραμμικά ανεξάρτητα / εξαρτημένα διανύσματα* $y_1, \ldots, y_m$.

**Ορισμός 1.0.2** *Ένα μη κενό* $M \subseteq E$ *λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν περιέχει κάποια* $y_1, \ldots, y_m$ *που είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Άρα το $M$ είναι ανεξάρτητο αν για κάθε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_1, \ldots, x_n$ του $M$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

**Ορισμός.** Ένα μη-κενό σύνόλο $F \subseteq E$ λέγεται γραμμικός υπόχωρος του $E$ αν για κάθε $x, y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ ισχύει $x + y \in \mathbb{K}$ και $\lambda x \in \mathbb{K}$.

**Ορισμός.** Γραμμική θήκη $\text{span}(A)$ ενός μη-κενού συνόλου $A \subset E$.

*Άσκηση.* Ισχύει $\text{span}(A) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n : \ n \in \mathbb{N}, x_k \in A \ \lambda_k \in \mathbb{K}\}$.

**Ορισμός 1.0.3 (βάση Hamel)**

Παράδειγμα: Η κανονική βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $c_{00}(\mathbb{N})$. Το ίδιο σύνολο όμως δεν είναι Hamel βάση στον $l^p(\mathbb{N})$.

**Ορισμός 1.0.4** *Έστω $E, F$ $\mathbb{K}$-γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται γραμμική αν*

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)\ , \qquad \forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\,.$$

*Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επι πλέον είναι 1-1 και επί. Δυο γραμμικοί χώροι $E, F$ λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \to F$.*

*Παρατήρηση.* Δύο διανυσματικοί χώροι ίσης πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφοι.

# 2 Χώροι εσωτερικού γινομένου

**Ορισμός 2.0.1** *Ονομάζουμε χώρο εσωτερικού γινομένου έναν γραμμικό χώρο $E$ πάνω στο $\mathbb{K}$ εφοδιασμένο με μία απεικόνιση $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ για την οποία ισχύουν*

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle, \quad x, y \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \\
\text{(ii)} & \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad x, y \in E \\
\text{(iii)} & \langle x, x\rangle \geq 0 \\
\text{(iv)} & \langle x, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = 0.
\end{array}$$

Τα παραπάνω συνεπάγονται επίσης

$$\begin{array}{rl}
\text{(iv)} & \langle x, \lambda y + \mu z\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle + \bar{\mu}\langle x, z\rangle, \quad x, y \in E,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \\
\text{(v)} & \langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0, \quad x \in E.
\end{array}$$

**Παράδειγμα 2.0.2** Οι παρακάτω χώροι είναι χώροι εσωτερικού γινομένου:
(1) Το $\mathbb{K}^n$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

(2) Ο γραμμικός χώρος

$$l^2(\mathbb{N}) = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots)\ :\ x_k \in \mathbb{K}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

Παρατηρείστε ότι η σειρά συγκλίνει αφού $|x_n y_n| \leq (|x_n|^2 + |y_n|^2)/2$.
(3) Ο χώρος $C([0,1])$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με τιμές στο $\mathbb{K}$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

(4) Ο χώρος $C^1([0,1])$ όλων των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο συνεχή στο $[0,1]$, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \{f(x)\overline{g(x)} + f'(x)\overline{g'(x)}\}dx.$$

**Ορισμός.** Αν έχουμε μία απεικόνιση για την οποία ισχύουν οι (i)-(iii) αλλά όχι απαραίτητα η (iv) τότε λέμε ότι έχουμε ένα ημιεσωτερικό γινόμενο.

Οι ακόλουθοι δύο είναι χώροι ημιεσωτερικού γινομένου οι οποίοι δεν είναι χώροι εσωτερικού γινομένου:

(1) Ο χώρος $C^1([0,1])$ με το

$$\langle\!\langle f, g\rangle\!\rangle = \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx.$$

(2) Ο χώρος των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$ με το

$$\langle\!\langle f, g\rangle\!\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

**Θεώρημα 2.0.3 (ανισότητα Cauchy-Schwarz)** *Σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου ισχύει*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}, \qquad \text{για κάθε } x, y \in E.$$

*Επιπλέον ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν τα $x$, $y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

*Απόδειξη.* Αν $\langle x, y\rangle = 0$ τότε το ζητούμενο προφανώς ισχύει. Έστω $\langle x, y\rangle = Re^{i\theta}$. Έστω τυχόν $r \in \mathbb{R}$ και έστω $\lambda = re^{i\theta}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \bar{\lambda}\langle x, y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2Rr + r^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $r \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη-θετική, δηλαδή $4R^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, και το ζητούμενο έπεται.

Επιπλέον ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν το τριώνυμο έχει πραγματική ρίζα $r_0$. Για αυτό το $r_0$ έχουμε τότε $x + \lambda y = 0$, και άρα τα $x$, $y$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

**Παράδειγμα 2.0.4** Η ανισότητα Cauchy-Schwarz εφαρμοζόμενη στο $C([0,1])$ συνεπάγεται την χρήσιμη ανισότητα

$$\Big(\int_0^1 |f(x)g(x)|dx\Big)^2 \leq \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\Big)\Big(\int_0^1 |g(x)|^2 dx\Big).$$

Αντίστοιχη χρήσιμη ανισότητα έχουμε για τον $l^2(\mathbb{N})$.

**Πρόταση 2.0.5** *Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται νορμικός χώρος αν ορίσουμε*

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

*Απόδειξη.* Η τριγωνική ανισότητα είναι το μόνο μη-τετριμμένο σημείο. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση.** Έχοντας ορίσει την νόρμα $\|\cdot\|$ η ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνει την απλούστερη μορφή

$$|\,\langle f, g\rangle\,| \leq \|f\|\|g\|.$$

**Παρατήρηση.** Άρα σε κάθε χώρο εσωτερικού γινομένου έχουμε όλες τις έννοιες τις θεωρίας των νορμικών (άρα και μετρικών) χώρων. Ειδικότερα έχουμε ότι

**Πρόταση 2.0.6** *Οι απεικονίσεις*

$$(x,y) \mapsto x+y$$

$$(x,\lambda) \mapsto \lambda x$$

$$(x,y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

*είναι συνεχείς.*

**Παρατήρηση.** Σε κάθε χώρο εσωτερικού γινομένου ισχύει

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.$$

**Πρόταση 2.0.7 (κανόνας του παραλληλογράμμου)** *Αν $E$ είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου τότε*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \textit{για κάθε } x, y \in E.$$

*Απόδειξη.* Απλές πράξεις. □

**Πρόταση 2.0.8 (πολική ταυτότητα)** *Έστω $E$ χώρος εσωτερικού γινομένου.*
(i) *Αν* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *τότε*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big), \ \text{για κάθε } x, y \in E.$$

(ii) *Αν* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *τότε*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big), \ \text{για κάθε } x, y \in E.$$

*Απόδειξη.* Απλές πράξεις. □

**Παρατήρηση 2.0.9** Η πολική ταυτότητα μας λέει ότι σε έναν χώρο εσωτερικού γινουμένο το εσωτερικό γινόμενο προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την νόρμα.

**Παρατήρηση 2.0.10** Αποδεικνύεται το εξής: η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός νορμικού χώρου $X$ είναι η νόρμα που επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ισχύει για την $\|\cdot\|$ ο κανόνας του παραλληλογράμμου.

## 2.1 Καθετότητα

**Ορισμός 2.1.1** *Δύο διανύσματα $x, y \in E$ για τα οποία ισχύει $\langle x, y\rangle = 0$ ονομάζονται ορθογώνια ή κάθετα μεταξύ τους.*

**Ορισμός 2.1.2** *Ένα σύνολο $\{e_i : i \in I\}$ λέγεται ορθοκανονικό αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$.*

**Παρατήρηση.** (άσκηση) Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

**Πρόταση 2.1.3 (Πυθαγόρειο θεώρημα)** *Αν τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ είναι ανά δύο κάθετα, τότε*

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

*Απόδειξη.* Απλές πράξεις. □

**Σημαντική παρατήρηση.** Έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο. Για κάθε $x \in E$ το διάνυσμα

$$x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$$

είναι κάθετο στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

**Πρόταση 2.1.4** *(Διαδικασία Gram-Schmidt)* (i) *Έστω* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου* $(E, \langle .,. \rangle)$. *Υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο* $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *στον* $E$ *ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *να ισχύει*

$$\text{span}\{e_k : k = 1, 2, ..., n\} = \text{span}\{x_k : k = 1, 2, ..., n\}.$$

(ii) *Κάθε υπόχωρος* $F \subset E$ *πεπερασμένης διάστασης έχει μια ορθοκανονική βάση* $\{e_1, \ldots, e_n\}$. *Κάθε* $x \in F$ *γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των* $\{e_k\}$, $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ .

*Απόδειξη.* Ορίζουμε τα διανύσματα $\{e_n\}$ επαγωγικά ως εξής:

$$y_1 = x_1, \qquad e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|},$$

Άρα $\text{span}\{e_1\} = \text{span}\{x_1\}$. Στη συνέχεια θέτουμε

$$y_2 = x_2 - \langle x_2, e_1 \rangle e_1, \qquad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|},$$

Ισχύει τότε $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ και $\text{span}\{e_1, e_2\} = \text{span}\{x_1, x_2\}$. Στη συνέχεια ορίζουμε

$$y_3 = x_3 - \langle x_3, e_1 \rangle e_1 - \langle x_3, e_2 \rangle e_2, \qquad e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|}.$$

Ισχύει τότε $\langle e_1, e_3 \rangle = 0$, $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$ και $\text{span}\{e_1, e_2, e_3\} = \text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$.
Επαγωγικά έχουμε

$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n, e_k \rangle e_k, \qquad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

Το $e_n$ είναι κάθετο σε κάθε ένα από τα $e_1, \ldots e_{n-1}$ και $\text{span}\{e_k : k = 1, 2, ..., n\} = \text{span}\{x_k : k = 1, 2, ..., n\}$. □

**Λήμμα 2.1.5** *Έστω* $E$ *χώρος με εσωτερικό γινόμενο,* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο και* $x \in E$.

*(α) Το διάνυσμα* $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle$ *είναι το μοναδικό πλησιέστερο στο* $x$ *στοιχείο του υποχώρου* $F = \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. *Επιπλέον το* $x - y_x$ *είναι κάθετο στον* $F$.

*(β) Αντίστροφα, αν* $y \in F$ *και* $x - y \perp F$, *τότε* $y = y_x$.

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mapsto \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$.
*Απόδειξη.* (α) Θεωρούμε ένα στοιχείο $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in F$. Γράφουμε

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \Big(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{n} \big(\langle x, e_k\rangle - \lambda_k\big) e_k\Big).$$

Τα δύο παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους αφού το πρώτο είναι κάθετο σε κάθε $e_k$.. Άρα

$$\begin{aligned} \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \Big\|^2 &= \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \Big\|^2 + \Big\| \sum_{k=1}^{n} \big(\langle x, e_k\rangle - \lambda_k\big) e_k \Big\|^2 \\ &= \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \Big\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \big| \langle x, e_k\rangle - \lambda_k \big|^2 \end{aligned} \tag{2. 1}$$

και συνεπώς ο πρώτος όρος ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν $\lambda_k = \langle x, e_k\rangle$, $k = 1, \ldots, n$.
(β) Είδαμε ήδη ότι το $x - y_x$ είναι κάθετο στο $F$. Έστω τώρα $y \in F$ ώστε $x - y$ κάθετο στον $F$. Τότε $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle e_k$. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ισχύει τότε $\langle x - y, e_k\rangle = 0$ και τότε εύκολα έπεται ότι $y = y_x$. □

**Θεώρημα 2.1.6 (ανισότητα Bessel )** *Έστω $E$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία. Για κάθε $x \in E$ ισχύει*

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

*Επιπλέον ισχύει η ισότητα αν και μόνο αν $x \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την (2. 1) και επιλέγουμε $\lambda_k = 0$.

**Πόρισμα (γενικευμένη ανισότητα Bessel)** Έστω $\{e_i : i \in I\}$ ορθκανονικό σύνολο. Ισχύει

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \tag{2. 2}$$

Ειδικότερα για κάθε $x \in E$ το σύνολο

$$J_x = \{i \in I \;:\; \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$$

είναι αριθμήσιμο.
*Απόδειξη.* Το πρώτο μέρος της παραπάνω σχέσης εξ ορισμού ισούται με

$$\sup_F \sum_{i \in F} |\langle x, e_i\rangle|^2$$

όπου το supremum λαμβάνεται ως προς όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα $F \subset I$. Συνεπώς η (2. 2) είναι άμεση συνέπεια της (απλής) ανισότητας Bessel.

Για κάθε $n$ ορίζουμε

$$J_x^n = \{i \in I \ : \ |\langle x, e_i\rangle|^2 > \frac{1}{n}\}$$

Ισχύει $J_x = \cup J_x^n$. Θα δείξουμε ότι κάθε $J_x^n$ είναι πεπερασμένο. Πράγματι, αν κάποιο $J_x^m$ είναι άπειρο τότε

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i \in J_x^m} |\langle x, e_i\rangle|^2 \geq \sum_{i \in J_x^m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \# J_x^m = +\infty \,.$$

□

# 3 Χώροι Hilbert

**Ορισμός 3.0.1** *Ένας πλήρης χώρος εσωτερικού γινομένου ονομάζεται χώρος Hilbert.*

Άρα κάθε χώρος Hilbert είναι και χώρος Banach και όλη η θεωρία των χώρων Banach μπορεί να εφαρμοστεί και σε χώρους Hilbert. Θα ασχοληθούμε κυρίως με ιδιότητες των χώρων Hilbert που εν γένει δεν ισχύουν (ή δεν έχουν έννοια) σε ένα χώρο Banach.

Ας θεωρήσουμε τους χώρους εσωτερικού γινομένου του Παραδείγματος 2.0.2. Τότε

1. Ο $\mathbb{K}^n$ με το εσωτερικό γινόμενα του Παραδείγματος 1 είναι χώρος Hilbert.
2. Ο $l^2(\mathbb{N})$ είναι χώρος Hilbert. Όμως ο $c_{00}(\mathbb{N})$ δεν είναι. Είναι πυκνός υπόχωρος του $l^2(\mathbb{N})$.
3. Ο $C([0,1])$ δεν είναι χώρος Hilbert.

Η πληρότητα του $\mathbb{C}^n$ είναι συνέπεια του ότι κάθε νορμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης είναι πλήρης. Για τα άλλα δύο χρειάζεται απόδειξη.

**Πρόταση 3.0.2** *Ο χώρος $l^2$ με το εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$ είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

*Απόδειξη.* (i) (Πληρότητα) Έστω $(a_n)$ μία ακολουθία Cauchy στον $l^2$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η $(a_n)$ συγκλίνει σε κάποιο όριο στον $l^2$. Κάθε $a_n$ είναι μία αριθμητική ακολουθία,

$$a_n = (a_{ni}) = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots)$$

και εξ ορισμού $a_n \in l^2$ σημαίνει $\sum_i \mid a_{ni} \mid^2 < \infty$. Έστω $i \in \mathbb{N}$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία $(a_{ni})_n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mid a_{ni} - a_{mi} \mid \quad &\leq \quad (\sum_{j=1}^{\infty} \mid a_{nj} - a_{mj} \mid^2)^{1/2} \\ &= \quad \|a_n - a_m\| \\ &\longrightarrow \quad 0 \text{ όταν } n, m \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άρα για κάθε $i$ η ακολουθία $(a_{ni})_n$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ και άρα συγκλίνει σε κάποιο όριο $b_i$. Έστω $b = (b_i)$. Θα δείξουμε ότι $b \in l^2$ και ότι $a_n \longrightarrow b$ στον $l^2$.

Αφού η $(a_n)$ είναι ακολουθία Cauchy είναι και φραγμένη, $\|a_n\| \leq M$. Έστω $j \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j} \mid b_i \mid^2 &= \sum_{i=1}^{j} (\lim_n \mid a_{ni} \mid^2) = \lim_n \sum_{i=1}^{j} \mid a_{ni} \mid^2 \\ &\leq \lim_n \sum_{i=1}^{\infty} \mid a_{ni} \mid^2 = \lim_n \|a_n\|^2 \leq M^2.\end{aligned}$$

Άρα $b \in l^2$. Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $n, m > N$ να συνεπάγεται $\|a_n - a_m\| < \epsilon$. Έστω τώρα $j \in \mathbb{N}$ σταθερό αλλά τυχαίο. Για $n, m > N$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{j} \mid a_{ni} - a_{mi} \mid^2 &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mid a_{ni} - a_{mi} \mid^2 \\ &= \|a_n - a_m\|^2 < \epsilon^2.\end{aligned}$$

Κρατώντας το $n$ σταθερό και αφήνοντας $m \longrightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{j} \mid a_{ni} - b_i \mid^2 \leq \epsilon^2\,, \quad \text{για κάθε } n > N,$$

και αφού το $j$ είναι τυχόν,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid a_{ni} - b_i \mid^2 \leq \epsilon^2\,, \quad \text{για κάθε } n > N,$$

δηλαδή

$$\|a_n - b\| \leq \epsilon, \quad \text{για κάθε } n > N.$$

Άρα $a_n \to b$, και η πληρότητα αποδείχθηκε.

(ii) (Διαχωρισιμότητα) Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots) \mid \ a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$$

και θέτουμε $A = \cup A_n$. Προφανώς το $A$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Θα αποδείξουμε ότι είναι πυκνό. Έστω λοιπόν $b \in l^2$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{i=N+1}^{\infty} \mid b_i \mid^2 < \epsilon^2$. Επιπλέον, για κάθε $i = 1, \ldots, N$ μπορούμε να βρούμε $a_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ ώστε $\mid a_i - b_i \mid < \epsilon/N^{1/2}$. Η ακολουθία $a = (a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots)$ τότε ανήκει στο σύνολο $A$ και

$$\begin{aligned}\|a - b\|^2 &= \sum_{i=1}^{N} \mid a_i - b_i \mid^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mid b_i \mid^2 \\ &< \sum_{i=1}^{N} (\epsilon^2/N) + \epsilon^2 = 2\epsilon^2.\end{aligned}$$

**Πρόταση 3.0.3** *Ο χώρος $C([-1,1])$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο*

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$$

*δεν είναι χώρος Hilbert.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την ακολουθία $(f_n)$ όπου

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0, \\ nx, & 0 \le x \le 1/n, \\ 1, & 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

Αφήνεται ως άσκηση να δειχθεί ότι η $(f_n)$ είναι ακολουθία Cauchy για την αντίστοιχη νόρμα, δηλαδή την $\|\cdot\|_2$. Θα χρησιμοποιήσουμε απαγωγή εις άτοπο. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει $f \in C([-1,1])$ ώστε $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Έστω τώρα $\delta > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n > N \Rightarrow f_n(x) = 1 \text{ στο } [\delta, 1].$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{1} \mid 1 - f(x) \mid^2 dx &= \int_{\delta}^{1} \mid f_n(x) - f(x) \mid^2 dx \\ &\le \|f_n - f\|_2^2 \\ &\longrightarrow 0 \text{ όταν } n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Αφού το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του $n$ πρέπει να είναι ίσο με μηδέν γεγονός που συνεπάγεται ότι $f(x) = 1$ στο $[\delta, 1]$. Άρα $f(x) = 1$ στο $(0,1]$ αφού το $\delta$ ήταν τυχόν. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(x) = 0$ στο $[-1, 0)$. Άρα η $f$ είναι ασυνεχής στο $x = 0$, άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $f \in C([-1,1])$. □

Θέλουμε να επεκτείνουμε το λήμμα πλησιέστερου σημείου (Λήμμα 2.1.5) στην περίπτωση όπου ο υπόχωρος $F$ είναι άπειρης διάστασης.

**Ορισμός 3.0.4** *Έστω $(X,d)$ μετρικός χώρος. Η απόσταση $d(a,K)$ ενός σημείου $a \in X$ από ένα μη-κενό σύνολο $K \subset X$ ορίζεται ως*

$$d(a,K) = \inf\{d(a,x) \mid x \in K\}.$$

**Ορισμός 3.0.5** *Ένα μη-κενό υποσύνολο $K$ ενός γραμμικού χώρου $V$ ονομάζεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in K$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.*

**Πρόταση 3.0.6** *Έστω $K$ κλειστό και κυρτό υπσύνολο του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Για κάθε $a \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $x \in K$ ώστε*

$$\|a - x\| = d(a,K).$$

*Απόδειξη.* (i) (Ύπαρξη) Έστω $(x_n)$ ακολουθία στοιχείων του $K$ τέτοια ώστε $\|a - x_n\| \longrightarrow d = d(a, K)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου στο διανύσματα $a - x_n$ και $a - x_m$ και χρησιμοποιόντας το γεγονός ότι $(x_n + x_m)/2 \in K$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\|^2 &= 2\|a - x_n\|^2 + 2\|a - x_m\|^2 - \|2a - x_n - x_m\|^2 \\
&\leq 2\|a - x_n\|^2 + 2\|a - x_m\|^2 - 4d^2 \\
&\longrightarrow 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0
\end{aligned}$$

καθώς $n, m \longrightarrow \infty$. Άρα η $(x_n)$ είναι ακολουθία Cauchy. Έστω $x$ το όριό της. Τότε $x \in K$ και

$$\|a - x\| = \lim \|a - x_n\| = d(a, K).$$

(ii) (Μοναδικότητα) Ας υποθέσουμε ότι για τα στοιχεία $x, x' \in K$ ισχύει $\|a - x\| = \|a - x'\| = d(a, K)$. Τότε $(x + x')/2 \in K$ και άρα

$$\begin{aligned}
d &\leq \|a - \frac{x + x'}{2}\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|a - x\| + \frac{1}{2}\|a - x'\| = d,
\end{aligned}$$

δηλαδή το στοιχείο $(x + x')/2$ έχει και αυτό την ιδιότητα της πρότασης. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου στα διανύσματα $a - x$ και $a - x'$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|x - x'\|^2 &= 2\|a - x\|^2 + 2\|a - x'\|^2 - \|2a - x - x'\|^2 \\
&= 2\|a - x\|^2 + 2\|a - x'\|^2 - 4\|a - \frac{x + x'}{2}\|^2 \\
&= 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0,
\end{aligned}$$

και άρα $x = x'$. □

**Πρόταση 3.0.7** *Έστω $K$ κλειστός γραμμικός υποχώρος του $\mathcal{H}$ και $a \in \mathcal{H}$. (i) Για το πλησιέστερο σημείο $x \in K$ του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει*

$$\langle a - x, y \rangle = 0, \qquad \text{για κάθε } y \in K. \tag{3. 3}$$

*(ii) Αντίστροφα, αν για κάποιο $x' \in K$ ισχύει η παραπάνω σχέση τότε το $x'$ είναι το σημείο του $K$ το πλησιέστερο στο $a$, δηλαδή $x' = x$.*

*Απόδειξη.* (i) Έστω $y \in K$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|y\| = 1$. Έστω

$$\lambda = \langle a - x, y \rangle.$$

Τότε $x + \lambda y \in K$ και άρα

$$\begin{aligned}
d^2 &\leq \|a - x - \lambda y\|^2 \\
&= \|a - x\|^2 + |\lambda|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle a - x, \lambda y \rangle \\
&= \|a - x\|^2 - |\lambda|^2 \\
&= d^2 - |\lambda|^2,
\end{aligned}$$

και άρα $\lambda = 0$.

(ii) Από την (3. 3) και την αντίστοιχη σχέση για το $x'$ έπεται ότι $\langle x - x', y\rangle = 0$ για κάθε $y \in K$. Άρα $x - x' \in K^{\perp}$. Όμως $x - x' \in K$, άρα $x = x'$. □

**Ορισμός 3.0.8** *Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός μη-κενού συνόλου $A \subset \mathcal{H}$ ορίζεται ως*

$$A^{\perp} = \{y \in \mathcal{H} \mid \langle x, y\rangle = 0, \quad \text{για κάθε } x \in A\}.$$

**Πρόταση 3.0.9** *Το $A^{\perp}$ είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$.*

*Απόδειξη.* Άσκηση. □

**Ορισμός 3.0.10** *Άθροισμα υποχώρων $M_1$, $M_2$. (Παρατήρηση. Το $M_1 + M_2$ είναι ο ελάχιστος υπόχωρος που περιέχει τα $M_1$, $M_2$.)*

**Ορισμός 3.0.11** *Έστω $M, M_1, M_2$ κλειστοί υποχώροι του $\mathcal{H}$. Λέμε ότι ο $M$ είναι το ευθύ άθροισμα των $M_1$ και $M_2$, $M = M_1 \oplus M_2$, αν κάθε στοιχείο $x$ του $M$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $x = x_1 + x_2$ με $x_i \in M_i$.*

**Άσκηση.** Έστω $M_1, M_2$ υπόχωροι του $E$. Το $M_1 \oplus M_2$ υπάρχει αν και μόνο $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ οπότε και συμπίπτει με το $M_1 + M_2$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν $M = M_1 \oplus M_2$ τότε $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Όταν $M = M_1 \oplus M_2$, η ισότητα $x = x_1 + x_2$ γράφεται συχνά και $x = x_1 \oplus x_2$.

**Πρόταση 3.0.12** *Για κάθε κλειστό υποχώρο $M$ του $\mathcal{H}$ ισχύει $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε ήδη δει ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $x_1 \in M$ ώστε

$$\|x - x_1\| = d(x, M)$$

και ότι τότε

$$\langle x - x_1, y\rangle = 0, \qquad \text{για κάθε } y \in M,$$

δηλαδή $x_2 := x - x_1 \in M^{\perp}$. Άρα

$$x = x_1 + x_2$$

είναι μια ανάλυση της ζητούμενης μορφής. Έστω τώρα ότι υπάρχει και δεύτερη τέτοια ανάλυση, $x = x_1' + x_2'$, με $x_1' \in M$, $x_2' \in M^{\perp}$. Τότε $x_1 - x_1' \in M$, και επίσης $x_1 - x_1' = (x - x_2) - (x - x_2') = x_2' - x_2 \in M^{\perp}$. Άρα

$$\|x_1 - x_1'\|^2 = \langle x_1 - x_1', x_1 - x_1'\rangle = 0,$$

και συνεπώς $x_1 = x_1'$, οπότε και $x_2 = x_2'$. □

**Πρόταση 3.0.13**

(i) *Αν* $M \subset N$ *τότε* $N^{\perp} \subset M^{\perp}$.

(ii) $M \subset M^{\perp\perp}$.

(iii) *Αν το* $M$ *είναι πυκνό τότε* $M^{\perp} = \{0\}$.

(iv) $M = M^{\perp\perp}$ *αν και μόνο αν το* $M$ *είναι κλειστός υποχώρος του* $\mathcal{H}$.

(v) *Αν το* $M$ *είναι υποχώρος και* $M^{\perp} = \{0\}$ *τότε το* $M$ *είναι πυκνό.*

*Απόδειξη.* Τα (i), (ii) αποδεικνύονται πολύ εύκολα.
(iii) Έστω $x \in M^{\perp}$. Υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subset M$ η οποία συγκλίνει στο $x$. Τότε $\langle x, x_n \rangle = 0$, και παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $x = 0$.
(iv) Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.0.9. Για το αντίστροφο, έστω $x \in M^{\perp\perp}$. Μπορούμε να γράψουμε $x = x_1 + x_2$ με $x_1 \in M$ και $x_2 \in M^{\perp}$. Παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο με το $x_2$ συμπεραίνουμε ότι $x_2 = 0$, και άρα $x = x_1 \in M$.
(v) Το $\overline{M}$ είναι κλειστός υποχώρος, και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{H} = \overline{M} \oplus \overline{M}^{\perp}.$$

Άρα κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται ως $x = x_1 + x_2$ με $x_1 \in \overline{M}$ και $x_2 \in \overline{M}^{\perp} = \{0\}$. Άρα $x = x_1 \in \overline{M}$ και άρα το $M$ είναι πυκνό. □

## 3.1 Ορθοκανονικές βάσεις

**Ορισμός.** Ορθοκανονική βάση.

**Πρόταση 3.1.1** *Ένα ορθοκανονικό σύνολο είναι ορθοκανονική βάση αν και μόνο αν είναι μεγιστικό.*

*Απόδειξη.* OK

**Θεώρημα 3.1.2** *Κάθε χώρος Hilbert έχει μία ορθοκανονική βάση.*

**Πρόταση 3.1.3** *Ένας χώρος Hilbert είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν έχει μία αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση.*

*Απόδειξη.* ($\Rightarrow$) Με Gram-Schmidt.
($\Leftarrow$) Ορίζουμε

$$A_n = \{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$$

και $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Τότε το $A$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. □

**Πρόταση 3.1.4** *Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικό σύνολο και $L = \overline{\text{span}\{e_n\}}$* (i) *Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ συγκλίνει και το άθροισμά της, έστω $y$, ικανοποιεί*

$$\|y\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2)^{1/2} \leq \|x\|.$$

(ii) *Ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = L \oplus L^{\perp}$ έχουμε*

$$x = y \oplus (x - y).$$

*Απόδειξη.* Έστω $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και την σύγκλιση της σειράς της ανισότητας Bessel έχουμε

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|\sum_{k=n+1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{m} | \langle x, e_k \rangle |^2 \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{όταν } m, n \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Άρα η $(y_n)$ είναι Cauchy και για το όριό της $y$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \|y_n\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} | \langle x, e_k \rangle |^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} | \langle x, e_k \rangle |^2 \\ &\leq \|x\|^2. \end{aligned}$$

(ii) Αρκεί να δείξει κανείς ότι $y - x \in L^{\perp}$. □

**Θεώρημα 3.1.5** *Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονικό σύνολο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) *Το $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση*

(2) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

(3) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ *για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

(4) *Αν $\langle x, e_n \rangle = 0$ για κάθε $n$, τότε $x = 0$.*

*Απόδειξη.* (1) $\Rightarrow$ (2) Έπεται από την Πρόταση 3.1.4, δεδομένου ότι $L = \mathcal{H}$ αφού το $\{e_n\}$ είναι βάση.
(2) $\Rightarrow$ (3) Άμεσο από την Πρόταση 3.1.4.
(3) $\Rightarrow$ (4) Άμεσο.
(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω $L = \overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Έστω $x \in \mathcal{H}$. Θέτουμε $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$, οπότε $y \in L$. Για κάθε $m$ έχουμε

$$\langle z - x, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_m \rangle - \langle x, e_m \rangle = 0.$$

Από την υπόθεση (3) έπεται $x = y$. Συνεπώς $x \in L$. Άρα ο $L = \mathcal{H}$, που σημαίνει ότι το $\{e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση.
□

**Παράδειγμα 3.1.6** 1. Αν ο χώρος $\mathcal{H}$ έχει πεπερασμένη διάσταση τότε η έννοια του πλήρους ορθοκανονικού συνόλου συμπίπτει με τη γνωστή από τη Γραμμική Άλγεβρα έννοια της ορθοκανονικής βάσης.
2. Στον χώρο $l^2(\mathbb{N})$ συμβολίζουμε με $e_n$ την ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι μηδέν εκτός από $n$-οστό, ο οποίος είναι ίσος με ένα. Το σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι προφανώς μία ορθοκανονική βάση. Η βάση αυτή ονομάζεται και συνήθης ή κανονική ορθοκανονική βάση του $l^2(\mathbb{N})$.
3. Στον χώρο $L^2([-\pi, \pi])$ με το ορίζουμε για $n \in \mathbb{Z}$ την συνάρτηση

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονικό. Είναι ένα από τα βασικά θεωρήματα της ανάλυσης Fourier το ότι το σύνολο είναι και πλήρες.

**Ορισμός 3.1.7** *Έστω $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ δύο χώροι Hilbert. Μία απεικόνιση $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ονομάζεται ισομορφισμός αν είναι 1-1, επί, γραμμική και επιπλέον*

$$\langle Ux, Ux \rangle_2 = \langle x, x \rangle_1, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}_1.$$

*Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ τότε οι $\mathcal{H}_1$ και $\mathcal{H}_2$ ονομάζονται ισόμορφοι.*

Είναι φανερό ότι η ισομορφία είναι μία σχέση ισοδυναμίας στη κλάση όλων των χώρων Hilbert.

**Πρόταση 3.1.8** *Όλοι οι απειροδιάστατοι, διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert είναι ισόμορφοι μεταξύ τους.*

*Απόδειξη.* Άσκηση. [*Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ είναι ισόμορφος με τον $l^2$ ως εξής: θεωρείστε μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\} \subset \mathcal{H}$ και ορίστε $U : l^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ μέσω της σχέσης $U(x_n) = \sum_n x_n e_n$. Στη συνέχεια ελέγξτε ότι ο $U$ είναι ισομορφισμός χώρων Hilbert.

# 4 Τελεστές σε χώρους Hilbert

## 4.1 Βασικές ιδιότητες

**Ορισμός 4.1.1** *Έστω $E$, $F$ νορμικοί χώροι. Μία γραμμική απεικόνιση $T : E \longrightarrow F$ λέγεται γραμμικός τελεστής.*

Για κάθε γραμμικό τελεστή $T$ ορίζονται τα σύνολα

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in E \ : \ Tx = 0\} \quad , \quad \mathrm{Ran}(T) = \{Tx \ : x \in E\},$$

γραμμικοί υποχώροι των $E$ και $F$ αντίστοιχα. Οι υπόχωροι αυτοί ονομάζονται πυρήνας και εικόνα του $T$ αντίστοιχα.

**Πρόταση 4.1.2** *Για έναν γραμμικό τελεστή $T : E \longrightarrow F$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *$T$ συνεχής*
(ii) *$T$ συνεχής στο $0$*
(iii) *$T$ συνεχής σε κάποιο σημείο*
(iv) *Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|Tx\| \leq M\|x\|$, για κάθε $x \in E$*
(v) *Η εικόνα της κλειστής μοναδιαίας μπάλα του $E$ είναι φραγμένο σύνολο*
(vi) *$T$ Lipschitz συνεχής*

**Ορισμός 4.1.3** *Ένας γραμμικός $T$ λέγεται* φραγμένος *αν ικανοποιείται μία (και άρα όλες) από τις παραπάνω συνθήκες.*

Για κάθε $T : E \to F$ ορίζουμε

$$\|T\| := \inf\{M \mid \quad \|Tx\| \leq M\|x\|, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}\}.$$

Είναι φανερό ότι

$$T \text{ φραγμένος } \iff \|T\| < +\infty.$$

**Πρόταση 4.1.4** *Ισχύει*

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \quad x \neq 0\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|Tx\| \ : \|x\| = 1\} \\
&= \min\{M : \quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M, \text{ για κάθε } x \neq 0\} \\
&= \min\{M : \quad \|Tx\| \leq M, \text{ για κάθε } x \text{ με } \|x\| \leq 1\} \\
&= \min\{M : \quad \|Tx\| \leq M, \text{ για κάθε } x \text{ με } \|x\| = 1\}.
\end{aligned}$$

*Απόδειξη.* Άσκηση □

**Θεώρημα 4.1.5** *Θεώρημα επέκτασης τελεστών.;;*

**Παραδείγματα.**

(1) Τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Αν $T : E \to F$ και $E$ πεπερασμένης διάστασης, τότε $T$ φραγμένος.
Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μία βάση του $E$ και την αντίστοιχη νόρμα.

(2) Έστω $a = (a_n) \in l^\infty(\mathbb{N})$. Ο διαγώνιος τελεστής $D_a$ είναι φραγμένος στον $l^2(\mathbb{N})$.

(3) Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a, b])$. $h \in C([a, b])$, $M_h$.

(4) Οι τελεστές μετατόπισης $S$ (δεξιά) και $S^*$ (αριστερά) στον $l^2(\mathbb{N})$.

(5) Στον χώρο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ η παραγώγιση δεν είναι συνεχής ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Όμοια για $C_c^\infty(\alpha, \beta)$.

(6) Ολοκληρωτικοί τελεστές

**Ορισμός.** Έστω $E$, $F$ νορμικοί χώροι. Το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : E \to F$ θα το συμβολίζουμε στο εξής με $\mathcal{B}(E, F)$.

Το σύνολο αυτό γίνεται γραμμικός χώρος κατά φυσικό τρόπο.

**Θεώρημα 4.1.6** *Έστω $E, F, K$ νορμικοί χώροι.*
(i) *Η απεικόνιση $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον γραμμικό χώρο $\mathcal{B}(E, F)$.*
(ii) *Αν επιπλέον ο $F$ είναι χώρος Banach τότε και ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach.*
(iii) *Αν $T \in \mathcal{B}(E, F)$ και $S \in \mathcal{B}(F, K)$ τότε $ST \in \mathcal{B}(E, K)$ και $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.*

*Απόδειξη.* (i) Άσκηση.

(ii) Έστω $(T_n)$ μία ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|,$$

και άρα η $(T_n x)$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{F}$. Αφού ο $\mathcal{F}$ είναι πλήρης, υπάρχει $y \in \mathcal{F}$ ώστε $T_n x \longrightarrow y$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το $y$ εξαρτάται γραμμικά από το $x$, οπότε ορίζεται ένας γραμμικός τελεστής

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}, \qquad Tx = y.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $T$ είναι φραγμένος και ότι $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$.
Αφού η $(T_n)$ είναι Cauchy υπάρχει $M$ ώστε $\|T_n\| \leq M$ για κάθε $n$. Άρα

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq M\|x\|,$$

και άρα ο $T$ είναι φραγμένος. Έστω τώρα $\epsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$n, m > n_0 \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \epsilon$$

και άρα για $n, m > n_0$ και κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \epsilon \|x\|.$$

Αφήνοντας $m \longrightarrow \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|T_n x - T x\| \leq \epsilon \|x\|,$$

και άρα

$$\|T_n - T\| \leq \epsilon, \qquad \text{για κάθε } n > n_0.$$

Άρα $T_n \to T$.

(iii) Για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\|STx\| \leq \|S\| \, \|Tx\| \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|,$$

άρα $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$. □

**Παράδειγμα 4.1.7** Έστω $\Omega$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Στον χώρο $L^2(\Omega)$ έστω $T$ ο τελεστής

$$Tf(x) = h(x)f(x),$$

όπου $h$ φραγμένη και συνεχής συνάρτηση στο $\Omega$. Τότε ο $T$ είναι φραγμένος και

$$\|T\| = \sup_{\Omega} |h|.$$

Για να το δείξουμε αυτό ας θέσουμε $M = \sup_{\Omega} |h|$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|Tf\|_2^2 &= \int_{\Omega} |Tf(x)|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |h(x)f(x)|^2 dx \\ &\leq M^2 \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \\ &= M^2 \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

και άρα ο $T$ είναι φραγμένος και $\|T\| \leq M$. Για το αντίστροφο θεωρούμε τυχόν $\epsilon > 0$. Λόγω της συνέχειας της $h$ υπάρχει τότε μπάλα $B \subset \Omega$ τέτοια ώστε

$$|h(x)| > M - \epsilon, \qquad \text{για κάθε } x \in B.$$

Έστω $\chi$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $B$. Τότε $\chi \in L^2(\Omega)$ και

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &\geq \frac{\|T\chi\|^2}{\|\chi\|^2} \\ &= \frac{\int_B \mid h(x)\chi(x) \mid^2 dx}{\int_B \mid \chi(x) \mid^2 dx} \\ &\geq (M - \epsilon)^2. \end{aligned}$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο συμπεραίνουμε ότι $\|T\| \geq M$.

**Παρατήρηση 4.1.8** Το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι $h \in L^\infty(\Omega)$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\|T\| = \|h\|_{L^\infty}$, όπου

$$\|h\|_{L^\infty} = \operatorname{Ess\,Sup}|h| = \inf\{M > 0 : |h(x)| \le M \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega\}.$$

## 4.2 Ο συζυγής τελεστής

**Θεώρημα 4.2.1 (θεώρημα αναπαράστασης του Riesz )** *Έστω $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ γραμμικός και φραγμένος. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathcal{H}$ ώστε*

$$\pi(x) = \langle x, y\rangle, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}. \tag{4. 4}$$

*Επιπλέον ισχύει $\|\pi\| = \|y\|$.*

*Απόδειξη.* (i) Μοναδικότητα. Αν τα στοιχεία $y_1, y_2$ έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα, συνάγουμε ότι $y_1 = y_2$ θεωρώντας το $\pi(y_1 - y_2)$.
(ii) Ύπαρξη. Αν $\pi = 0$ τότε το θεώρημα είναι προφανές. Έστω λοιπόν $\pi \neq 0$. Τότε ο πυρήνας $\operatorname{Ker}(\pi)$ είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$ και περιέχεται γνήσια στον $\mathcal{H}$. Έστω $z \in \operatorname{Ker}(\pi)^\perp, z \neq 0$. Τότε για κάθε $x \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$\pi(x)z - \pi(z)x \in \operatorname{Ker}(\pi),$$

άρα

$$\langle \pi(x)z - \pi(z)x, z\rangle = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathcal{H}$$

και συνεπώς

$$\pi(x) = \langle x, \frac{\overline{\pi(z)}z}{\|z\|^2}\rangle.$$

Άρα το $y = (\overline{\pi(z)}/\|z\|^2)z$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. Το ότι $\|\pi\| \le \|y\|$ είναι άμεσο, ενώ η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει επιλέγοντας $x = y$ στην (4. 4). □

**Θεώρημα 4.2.2** *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H},\ y \in \mathcal{F}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $y \in \mathcal{F}$. Θα ορίσουμε το $T^*y$. Έστω το γραμμικό συναρτησιοειδές $\pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$$\pi(x) = \langle Tx, y\rangle, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Τότε

$$|\pi(x)| \le \|Tx\|\|y\| \le \|T\|\|y\|\|x\|,$$

και άρα το $\pi$ είναι φραγμένο και $\|\pi\| \le \|T\|\|y\|$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έπεται ότι υπάρχει μοναδικό $z = z(T, x) \in \mathcal{H}$ με $\|z\| = \|\pi\| \le \|T\|\|x\|$ ώστε $\pi(x) = \langle x, z\rangle$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, δηλαδή

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle, \qquad \text{για κάθε } x \in \mathcal{H}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $y \mapsto z$ είναι γραμμική, και έχουμε ήδη δει ότι είναι φραγμένη. Άρα ορίζεται ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $T^* : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ από τη σχέση $z = T^*y$. Προφανώς $\|T^*\| \leq \|T\|$, και ο $T^*$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα. □

**Ορισμός 4.2.3** *Ο τελεστής $T^*$ ονομάζεται συζυγής του $T$.*

**Άσκηση 4.2.1** Στον χώρο Hilbert $\mathbb{C}^N$ (με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο) να βρεθεί ο συζυγής πίνακας ενός πίνακα $A = (a_{ij})$.

**Πρόταση 4.2.4** *Έστω $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{K})$. Τότε*

(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

(ii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

(iii) $(ST)^* = T^* S^*$

(iv) $T^{**} = T$

(v) $\|T^*\| = \|T\|$

(vi) $\|T^*T\| = \|T\|^2$

(vii) *Αν ο $T$ είναι αντιστρέψιμος τότε και ο $T^*$ είναι αντιστρέψιμος και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

*Απόδειξη.* Θα αποδείξουμε μόνο το (vi), τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. Έχουμε $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Επίσης

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1} \langle T^*Tx, x\rangle \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tf\|\|x\| \\ &= \|T^*T\|. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 4.2.5** 1. Έστω $T$ στον $L^2(\Omega)$ ο τελεστής που δρα πολλαπλασιάζοντας με $h \in L^\infty(\Omega)$. Τότε

$$T^*f(x) = \overline{h(x)} f(x).$$

2. Ο τελεστής *δεξιάς μετατόπισης* στον $l^2$ ορίζεται από τη σχέση

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Τότε

$$S^*(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, \ldots).$$

Ο $S^*$ ονομάζεται τελεστής της *αριστερής μετατόπισης*.

3. Στον $L^2(0, 1)$ έστω

$$Bf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Τότε

$$B^*g(x) = \int_x^1 g(t)dt.$$

**Πρόταση 4.2.6** *Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ισχύει*

$$\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ran}(T)^\perp, \qquad \overline{\mathrm{Ran}(T^*)} = \mathrm{Ker}(T)^\perp.$$

*Απόδειξη.* Άσκηση. □

## 4.3 Ειδικοί τύποι τελεστών

### 4.3.1 Μοναδιαίοι τελεστές και ισομετρίες

Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι Hilbert.

**Ορισμός 4.3.1** (i) *Ένας τελεστής $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ για τον οποίο ισχύει $\|Ax\| = \|x\|$, $x \in \mathcal{H}$, ονομάζεται ισομετρία.* (ii) *Ένας ισομορφισμός χώρων Hilbert $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ ονομάζεται* μοναδιαίος *τελεστής.*

Δηλαδή ο $U$ είναι μοναδιαίος αν είναι 1-1, επί, γραμμικός και

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \qquad x, y \in \mathcal{H}.$$

Κάθε μοναδιαίος τελεστής είναι και ισομετρία, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Ως παράδειγμα θεωρείστε τον τελεστή $S$ της δεξιάς μετατόπισης στον $l^2$ (Παράδειγμα 4.2.5). Ο $S$ είναι ισομετρία και $S^*S = I$, όμως $SS^* \neq I$, άρα ο $S$ δεν είναι μοναδιαίος.

**Πρόταση 4.3.2** *Μία ισομετρία $U$ είναι μοναδιαίος τελεστής αν και μόνο αν είναι επί.*

*Απόδειξη.* Άμεση συνέπεια των ορισμών. □

**Πρόταση 4.3.3** *Ο τελεστής $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν*

$$U^*U = I_{\mathcal{H}} \text{ και } UU^* = I_{\mathcal{F}}.$$

*Απόδειξη.* Άσκηση. □

### 4.3.2 Ορθογώνιες προβολές

Έστω $M$ κλειστός υποχώρος του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Έχουμε δει ότι κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως

$$x = x_1 \oplus x_2$$

με $x_1 \in M$ και $x_2 \in M^\perp$.
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η απεικόνιση $x \mapsto x_1$ είναι γραμμική, άρα ορίζει έναν (γραμμικό) τελεστή $P$ στον $\mathcal{H}$, $Px = x_1$. Επιπλέον, ο $P$ είναι φραγμένος και $\|P\| = 1$, εκτός από την ειδική περίπτωση όπου $M = \{0\}$ οπότε $P = 0$. Πράγματι,

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \|Px\|^2$$

ενώ $Py = y$ για κάθε $y \in M$.

**Ορισμός 4.3.4** *Ο τελεστής $T$ που ορίσαμε ονομάζεται* ορθογώνια προβολή *πάνω στον $M$.*

**Παρατήρηση 4.3.5** (i) Έπεται από τα παραπάνω ότι για $g \in M$ έχουμε $Pg = g$, ενώ για $g \in M^\perp$ έχουμε $Pg = 0$. Με άλλα λόγια, ο $P$ περιορισμένος στο $M$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής, ενώ περιορισμένος στον $M^\perp$ είναι ο μηδενικός τελεστής. Αυτό συχνά το εκφράζουμε γράφοντας ότι υπό την ανάλυση

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

έχουμε

$$P = I \oplus 0.$$

(ii) Είναι άμεσο ότι η ορθογώνια προβολή πάνω στον κλειστό υποχώρο $M^\perp$ είναι η $I - P$.
(iii) Είναι επίσης άμεσο ότι

$$\mathrm{Ran}(P) = M \qquad , \qquad \mathrm{Ker}(P) = M^\perp.$$

**Θεώρημα 4.3.6** *Έστω $P$ η ορθογώνια προβολή πάνω στον κλειστό υποχώρο $M$ του $\mathcal{H}$. Τότε $P = P^2 = P^*$. Αντίστροφα, αν $T$ είναι ένας φραγμένος τελεστής για τον οποίο ισχύει $T = T^2 = T^*$, τότε ο υποχώρος $N := \mathrm{Ran}(T)$ είναι κλειστός και ο $T$ είναι η ορθογώνια προβολή πάνω στον $N$.*

*Απόδειξη.* Έστω $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ δύο στοιχεία του $\mathcal{H}$. Έχουμε

$$P^2 x = P(P(x_1 + x_2)) = Px_1 = x_1 = Px,$$

και άρα $P^2 = P$. Ακόμα

$$\begin{aligned} \langle Px, y \rangle &= \langle x_1, y_1 + y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 \rangle \\ &= \langle x, Py \rangle \end{aligned}$$

και άρα $P = P^*$.

Για το αντίστροφο, έστω $T$ ένας φραγμένος και $T = T^2 = T^*$. Έστω $Tx_n \longrightarrow y$. Τότε

$$Tx_n = T^2 x_n \longrightarrow Ty,$$

άρα $y = Ty$ και συνεπώς ο $\mathrm{Ran}(T)$ είναι κλειστός.
Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x$ έχουμε $(I - T)x \in \mathrm{Ran}(T)^{\perp}$. Έστω λοιπόν $y \in \mathcal{H}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\langle Ty, x - Tx\rangle &= \langle Ty, x\rangle - \langle Ty, Tx\rangle \\ &= \langle Ty, x\rangle - \langle Ty, x\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

**Παράδειγμα 4.3.7** Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.1.4 ότι αν $\{e_n\}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο, τότε

$$Px = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n$$

είναι η ορθογώνια προβολή στο $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}}$ (Ειδικότερα, αν το $\{e_n\}$ είναι πλήρες τότε $P = I$ και ανακτούμε το (i) του Θεωρήματος 3.1.5).

**Άσκηση 4.3.1** Στον $L^2(\Omega)$ έστω ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $Tf(x) = h(x)f(x)$, όπου $h \in L^{\infty}(\Omega)$. Βρείτε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για την συνάρτηση $h$ ώστε ο $T$ να είναι ορθογώνια προβολή. Περιγράψτε τους υποχώρους $\mathrm{Ran}(T)$ και $\mathrm{Ker}(T)$ (όταν ο $T$ είναι ορθογώνια προβολή).

## Φυσιολογικοί τελεστές

**Πρόταση 4.3.8** *Έστω $T \in B(H)$ όπου $\mathcal{H}$ μιγαδικός χώρος Hilbert. Τότε*

(i) *$T$ φυσιολογικός ανν $\|T^*x\| = \|Tx\|$*
(ii) *$T$ αυτοσυζυγής ανν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$*
(iii) *$T$ ισομετρία ανν $T^*T = I$*
(iv) *$T$ μοναδιαίος ανν $T$ ισομετρία και επί*

*Απόδειξη.* (ii) Για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\begin{aligned}4\langle Tx, y\rangle &= \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &+ i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\end{aligned}$$

(ελέγξτε την παραπάνω σχέση: είναι γενίκευση της πολικής ταυτότητας, Πρόταση 2.0.8) και παρόμοια

$$\begin{aligned} 4\langle x, Ty\rangle &= \langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle \\ &+ i\langle x+iy, T(x+iy)\rangle - i\langle x-iy, T(x-iy)\rangle. \end{aligned}$$

Από το ότι

$$\langle Tz, z\rangle = \overline{\langle Tz, z\rangle} = \langle z, Tz\rangle, \text{ για κάθε } z \in \mathcal{H},$$

έπεται το ζητούμενο. □

**Πρόταση 4.3.9** *Ισχύουν τα εξής:*

(i) $T$ *α.σ.* , $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda T$ *α.σ.*

(ii) $T_1, T_2$ *α.σ.* $\Rightarrow T_1 + T_2$ *α.σ.*

(iii) $T_1, T_2$ *α.σ.* $\Longrightarrow (T_1T_2$ *α.σ.* $\Leftrightarrow T_1, T_2$*μετατίθενται*$)$

(iv) *αν* $(T_n)$ *α.σ.* *και* $T_n \to T$ *τότε* $T$ *α.σ.*

(v) *αν* $T$ *α.σ.* *τότε* $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$.

*Απόδειξη.* Άσκηση.

**Παρατήρηση.** Κάθε τελεστής γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $A + iB$ όπου $A$, $B$ αυτοσυζυγείς.

## 4.4 Θετικά ημιορισμένοι τελεστές

**ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΣΤΟ ΕΞΗΣ ΟΤΙ ΟΙ ΧΩΡΟΙ ΕΙΝΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ**

Ορισμός. Ο χώρος $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$. Η σχέση $T \geq S$.

**Παρατήρηση. Κάθε θετικά ημιορισμένος τελεστής είναι αυτοσυζυγής.**

**Πρόταση 4.4.1** *Ο* $(\mathcal{B}_h(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ *είναι* $\mathbb{R}$*-χώρος Banach.*

*Ο* $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}_h(\mathcal{H})$ *είναι:*

- *κώνος:* $A \geq 0,\ t \geq 0 \ \Rightarrow tA \geq 0$.
- *κυρτός:* $A, B \geq 0,\ \lambda \in [0,1] \ \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- *γνήσιος:* $A \geq 0$ *και* $-A \geq 0 \ \Rightarrow A = 0$.
- *παράγει* $\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$ *(full cone):*$\forall T \in \mathcal{B}_h \ \ \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$*-κλειστός.*

**Παρατήρηση.**

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(\mathcal{H})$ είναι συμβατή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in R$)

$$\begin{aligned} & A \geq B,\ S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T \\ \text{και}\quad & \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B. \end{aligned}$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$. γιατί εν γένει ο $AB$ δεν είναι καν αυτοσυζυγής.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο $T$ είναι θετικός.

$$\begin{aligned} \text{Αν } A = A^* \text{ τότε}\quad & -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I \\ \text{άρα}\quad & A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad \text{(διαφορά δύο θετικών)} \end{aligned}$$

**Λήμμα 4.4.2** *Αν ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, τότε*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

*Απόδειξη.* Έστω $M$ το δεξί μέλος της ζητούμενης σχέσης. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2,$$

και άρα $M \leq \|T\|$. Τώρα, για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ = \;& 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle \\ = \;& 4\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle, \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} 4 \mid \mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \mid \;&\leq\; M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 \\ &=\; 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

Έπεται ότι αν $\|x\|, \|y\| \leq 1$ τότε $|\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle| \leq M$ και άρα για τυχόντα $x, y \in \mathcal{H}$

$$|\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle| \leq M\|x\|\|y\|.$$

Επιλέγοντας $y = Tx$ παίρνουμε

$$\|Tx\|^2 \leq M\|x\|\|Tx\|$$

και έτσι συμπεραίνουμε ότι $\|T\| \leq M$. □

**Πρόταση 4.4.3** *Αν $B$ είναι ένας θετικά ημιορισμένος τελεστής τότε*

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\quad |\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \\ &\text{(ii)}\quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\langle Bx, x\rangle\,. \end{aligned}$$

*Απόδειξη.* (i) Cauchy-Schwarz

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}\|Bx\|^4 &= \langle Bx, Bx\rangle^2 \\ &\leq \langle Bx, x\rangle B^2xBx \\ &\leq \langle Bx, x\rangle\|B^2x\|\,\|Bx\|\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

**Πρόταση 4.4.4** *Έστω $(B_n)$ αύξουσα και ακολουθία τελεστών και άνω φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $C$ ώστε $B_n \leq C$. Τότε η $(B_n)$ συγκλίνει ως προς την ισχυρή τοπολογία, υπάρχει δηλαδή μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής $Y$ ώστε $B_nx \to Yx$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.*

*Απόδειξη.* Από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η ακολουθί α $\|B_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, είναι φραγμένη. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|B_n\| \leq M$. Έχουμε τότε

$$\|B_nx - B_x\|^2 \leq \|B_n - B_m\|\langle(B_n - B_m)x, x\rangle \leq 2M\langle(B_n - B_m)x, x\rangle$$

και άρα η $(B_nx)$ είναι συγκλίνουσα. Το όριο $y(x)$ εξαρτάται γραμμικά από το $x$ και έτσι ορίζεται ένας γραμμικός τελεστής $Y$. Ο $Y$ είναι φραγμένος και ισχύει $B_n \to Y$ στην ισχυρή τοπολογία. Ισχύει

$$\langle Yx, x\rangle = \sup\langle B_nx, x\rangle$$

και άρα $B_n \leq Y$. Αν $C$ είναι ένας άλλος τελεστής κλπ □

**Πρόταση 4.4.5** *Για κάθε θετικά ημιορισμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ υπάρχει μοναδικός θετικά ημιορισμένος τελεστής $X$ ώστε $X^2$. Γράφουμε $X = A^{1/2}$. Επιπλέον ο $X$ μετατίθεται με κάθε τελεστή ο οποίος μετατίθεται με τον $A$.*

*Απόδειξη.* Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|A\| = 1$, οπότε $) \leq A \leq I$. Θέτουμε $B = I - A$ και $Y = I - X$ οπότε θέλουμε να λύσουμε την $(I - Y)^2 = I - B$ , ισοδύναμα

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$$

Ορίζουμε μία ακολουθία ως εξής

$$Y_1 = 0 \ , \qquad Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B + Y_n^2).$$

Είναι άμεσο ότι κάθε $Y_n$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Θα δείξουμε ότι η $(Y_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη.

*Άνω φραγμένη.* Εύκολα με επαγωγή.

*Αύξουσα.* Δείχνουμε με επαγωγή ότι κάθε $Y_{n-1} - Y_n$ είναι πολυώνυμο του $B$ με μη-αρνητικούς συντελεστές. Για αυτό χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1}).$$

Έστω $Y$ το ισχυρό όριο της $(Y_n)$. Θα δείξουμε ότι

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2).$$

Καταρχήν έχουμε $Y^2 x = \lim Y_n^2 x$. Πράγματι

$$\|(Y^2 - Y_n^2)x\| = \|(Y - Y_n)Yx + Y_n(Y - Y_n)x\| \leq \|(Y - Y_n)xYx\| + \|(Y - Y_n)x\| \to 0.$$

Άρα

$$Yx = \lim Y_n x = \lim \frac{1}{2}(B + Y_n^2)x = \frac{1}{2}(B + Y^2)x$$

Δείχνουμε τώρα τη μοναδικότητα του παραπάνω τελεστή $X$. Έστω ότι υπάρχει κι ένας δεύτερος τελεστής $C$ ώστε $C^2 = A$. Τότε οι $C$ και $A$ μετατίθενται, άρα οι $C$ και $X$ μετατίθενται. Έστω $D$ και $Z$ θετικά ημιορισμένοι τελεστές τέτοιοι ώστε

$$D^2 = C \qquad , \qquad Z^2 = X.$$

Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $y = (C - X)x$. Τότε

$$\begin{aligned}
\|Dy\|^2 + \|Zy\|^2 &= \langle D^2 y, y\rangle + \langle Z^2 y, y\rangle \\
&= \langle((C + X)y, y\rangle \\
&= \langle((C + X)(C - X)x, y\rangle \\
&= \langle(C^2 - X^2)x, y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $Xy = Cy = 0$. Άρα

$$\|(C - X)x\|^2 = \langle(C - X)^2 x, x\rangle = \langle(C - X)y, x\rangle = 0.$$

Άρα $C = X$. □

**Ορισμός.** Ένας τελεστής $V \in \mathcal{H}(\mathcal{H})$ λέγεται μερική ισομετρία αν ο περιορισμός του στο $\mathrm{Ker}(V)^\perp$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος $\mathrm{Ker}(V)^\perp$ λέγεται αρχικός χώρος ενώ η εικόνα $\mathrm{Ran}(V)$ λέγεται τελικός υπόχωρος της μερικής ισομετρίας.

*Παρατήρηση.* Αν ο $V$ είναι μερική ισομετρία τότε η εικόνα $\mathrm{Ran}(V)$ είναι κλειστός υπόχωρος.

# 5 Συμπαγείς τελεστές

Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι Hilbert.

**Ορισμός 5.0.1** *Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι Hilbert. Ένας τελεστής $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$ λέγεται συμπαγής αν η εικόνα της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{H}$ είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{F}$.*

*Παρατήρηση.* Έπεται άμεσα ότι κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος.

**Παράδειγμα 5.0.2** 1. Κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης (τάξη ενός τελεστή $T$ ονομάζεται η διάσταση της εικόνας $\mathrm{Ran}(T)$) είναι συμπαγής.

2. Αν ένας τελεστής έχει μία μη-μηδενική ιδιοτιμή άπειρης πολλαπλότητας τότε δεν είναι συμπαγής. Ειδικότερα μία ορθογώνια προβολή $P$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν η εικόνα της έχει πεπερασμένη διάσταση. (Άρα ο ταυτοτικός τελεστής σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert δεν είναι συμπαγής τελεστής).

**Πρόταση 5.0.3** *Έστω $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{F}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο $T$ είναι συμπαγής*

(ii) *Ο $T$ απεικονίζει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα*

(iii) *Αν η $(x_n)$ είναι φραγμένη τότε η $(Tx_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία*

**Πρόταση 5.0.4** *Το σύνολο $\mathcal{C}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ όλων των συμπαγών τελεστών από τον $\mathcal{H}$ στον $\mathcal{F}$ είναι γραμμικός υποχώρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.*

**Θεώρημα 5.0.5** *Ο $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ είναι ιδεώδες του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, δηλαδή αν ο $T$ είναι συμπαγής και ο $S$ φραγμένος, τότε οι τελεστές $TS$ και $ST$ είναι και οι δύο συμπαγείς.*

*Απόδειξη.* Έστω $(x_n)$ μία φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{H}$. Τότε και η $(Sx_n)$ είναι φραγμένη, και άρα η $(TSx_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα ο τελεστής $TS$ είναι συμπαγής. Επίσης, η $(Tx_n)$ έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία $(Tx_{n_k})$, και αφού ο $S$ είναι φραγμένος έπεται ότι η $(STx_{n_k})$ συγκλίνει. Άρα και ο $ST$ είναι συμπαγής. □

**Λήμμα 5.0.6** *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{H}$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.*

*Απόδειξη.* (i) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος.

Έστω $(x_n)$ φραγμένη ακολουθία, $\|x_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\{y_n\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{H}$. Η ακολουθία $(\langle x_n, y_1 \rangle)$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει υπακολουθία $(x_{1,n})$ της $(x_n)$ της $(x_n)$ ώστε η $(\langle x_{1,n}, y_1 \rangle)$ να είναι συγκλίνουσα. κλπ.

Ορίζουμε τώρα τη διαγώνια ακολουθία $(z_n) = (x_{n,n})$. Τότε η $(\langle z_n, y_k \rangle)$ συγκλίνει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε ότι η $(z_n)$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα.

**Ισχυρισμός.** Έστω $y \in \mathcal{H}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|y - y_k\| < \frac{\epsilon}{4M}.$$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{αν } n, m \geq n_0 \text{ τότε } |\langle z_n, y_k\rangle - \langle z_m, y_k\rangle| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |\langle z_n - z_m, y\rangle| &\leq |\langle z_n - z_m, y_k\rangle| + |\langle z_n - z_m, y - y_k\rangle| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|z_n - z_m\| \, \|y - y_k\| \\ &\leq \epsilon\,. \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $(\langle z_n, y\rangle)$ είναι Cauchy, άρα και συγκλίνουσα, για κάθε $y \in \mathcal{H}$. Η απεικόνιση

$$y \mapsto \lim \langle y, z_n\rangle$$

είναι γραμμική, άρα ορίζει ένα γραμμικό συναρτησιακό. Το συναρτησιακό αυτό είναι επιπλέον φραγμένο αφού

$$\|\lim \langle y, z_n\rangle\| \leq M\|y\|.$$

Άρα υπάρχει $z \in \mathcal{H}$ ώστε

$$\lim \langle y, z_n\rangle = \langle y, z\rangle \quad , \qquad y \in \mathcal{H}\,.$$

Συνεπώς $z_n \to z$ ασθενώς.

(ii) Θεωρούμε τώρα την περίπτωση μη διαχωρίσιμου χώρου Hilbert. Έστω και πάλι $(x_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{H}$. Έστω $\mathcal{H}_0 = \overline{\text{span}}\{x_n \, n \in \mathbb{N}\}$. Τότε ο $\mathcal{H}_0$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Άρα, από το (i), η $(x_n)$ έχει ακολουθία $(z_n)$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in \mathcal{H}_0$ ασθενώς στον $\mathcal{H}_0$.

Έστω τώρα τυχόν $y \in \mathcal{H}$. Γράφουμε

$$y = y_0 + y_1 \qquad , \qquad y_0 \in \mathcal{H}_0\,, \;\; y_1 \in \mathcal{H}_0^{\perp}$$

Τότε

$$\langle z_n, y\rangle = \langle z_n, y_0\rangle + \langle z_n, y_1\rangle \to \langle z, y_0\rangle = \langle z, y\rangle.$$

Άρα $z_n \to z$ ασθενώς στον $\mathcal{H}$. □

Θεωρούμε γνωστή την Αρχή του Ομοιόμορφου φράγματος. Η αρχή αυτή έχει την α- κόλουθη συνέπεια

**Πρόταση 5.0.7** *Έστω $(x_n) \subset \mathcal{H}$. Αν για κάθε $y \in \mathcal{H}$ η ακολουθία $(\langle x_n, y\rangle)$ είναι φραγμένη, τότε η $(x_n)$ είναι φραγμένη.*

**Πρόταση 5.0.8** *Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *$T$ συμπαγής*

(ii) *αν $x_n \to x$ ασθενώς τότε $Tx_n \to Tx$*

*Απόδειξη.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$. Έστω αντίθετα ότι $Tx_n \not\to 0$. Υπάρχει τότε $\epsilon > 0$ ώστε $\|Tx_n\| \geq \|\epsilon$. Η ακολουθία $(Tx_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, $T_{x_{n_k}} \to y$. Ισχύει $y \neq 0$ αφού $\|Tx_n\| \geq \epsilon$ Για κάθε $z \in \mathcal{H}$ έχουμε $\langle x_n, z\rangle \to 0$. Γισ $z = T^* y$ έχουμε

$$\langle x_{n_k}, z\rangle = \langle Tx_{n_k}, y\rangle \to \|y\|^2.$$

Άρα $y = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $(x_n)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathcal{H}$. Η $(x_n)$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία $x_{n_k} \to x$. Άρα $Tx_{n_k} \to Tx$. □

**Θεώρημα 5.0.9** *Ο $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ Η είναι κλειστός υποχώρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

*Απόδειξη.* Έστω $(T_n)$ ακολουθία συμπαγών τελεστών η οποία συγκλίνει σε κάποιον τελεστή $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Θα αποδείξουμε ότι ο $T$ είναι συμπαγής. Έστω λοιπόν $(x_n)$ μία φραγμένη ακολουθία. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_n\| \leq 1$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(Tx_n)$ έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία. Αφού ο $T_1$ είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_{1,k}})_k$ της $(x_n)$ τέτοια ώστε η $(T_1 x_{n_{1,k}})$ να συγκλίνει. Αφού ο $T_2$ είναι συμπαγής, υπάρχει ακολουθία $(x_{n_{2,k}})_k$, υπακολουθία της $(x_{n_{1,k}})_k$ τέτοια ώστε η $(T_2 x_{n_{2,k}})$ να είναι συγκλίνουσα. Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ ορίζεται μία ακολουθία $S_i = (x_{n_{i,k}})_k$ και ισχύει ότι (i) η $S_i$ είναι υπακολουθία της $S_{i-1}$ και (ii) η ακολουθία $(T_i x_{n_{i,k}})_k$ συγκλίνει για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε

$$y_k = x_{n_{k,k}}.$$

Προφανώς η $(y_k)$ είναι υπακολουθία της $(x_n)$. Επίσης, η ακολουθία $(y_{i+k})_k$ είναι υπακολουθία της $(x_{n_{i,k}})_k$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. [Ένα διάγραμμα πιθανώς να σας βοηθήσει να ξεκαθαρίσετε γιατί ισχύει αυτό] Θα αποδείξουμε ότι η $(Ty_k)$ συγκλίνει δείχνοντας ότι είναι Cauchy. Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Υπάρχει τότε $i \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|T_i - T\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Αφού η $(y_{i+k})_k$ είναι υπακολουθία της $(x_{n_{i,k}})_k$ και η $(T_i x_{n_{i,k}})_k$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $(T_i y_{i+k})_k$, άρα υπάρχει $N = N(i)$ ώστε

$$n, m \geq N \Rightarrow \|T_i y_n - T_i y_m\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Άρα για $n, m \geq N(i)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|Ty_n - Ty_m\| &\leq \|Ty_n - T_i y_n\| + \|T_i y_n - T_i y_m\| + \\
&\quad + \|T_i y_m - Ty_m\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{3}\|y_n\| + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}\|y_m\| \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα η $(Ty_k)$ είναι Cauchy, το οποίο ήταν το ζητούμενο. □

**Πρόταση 5.0.10** *Ο $T$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο $T^*$ είναι συμπαγής.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι ο $T$ είναι συμπαγής. Τότε και ο $TT^*$ είναι συμπαγής. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\|T^*y\|^2 = \langle TT^*y, y\rangle \leq \|TT^*y\| \, \|y\| \, .$$

Έστω $(x_n)$ ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{H}$ κλπ. □

## 5.1 Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές

**Ορισμός 5.1.1** *Έστω $M$ ένας κλειστός υποχώρος του $\mathcal{H}$. Λέμε ότι ο τελεστής $T$ αφήνει τον $M$ αναλλοίωτο αν $x \in M$ συνεπάγεται $Tx \in M$. Λέμε ότι ο $T$* ανάγει *τον $M$ αν αφήνει αναλλοίωτο και τον $M$ και τον $M^\perp$.*

Δηλαδή ο $T$ ανάγει $M$ αν η δράση του $T$ στον $M$ και η δράση του στον $M^\perp$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό εκφράζεται και ως εξής: καταρχήν τόσο ο $M$ όσο και ο $M^\perp$ είναι χώροι Hilbert ως κλειστοί υποχώροι του $\mathcal{H}$. Αν ο $T$ ανάγει τον $M$ τότε υπάρχουν τελεστές $A \in \mathcal{B}(M)$ και $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$ ώστε

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$$

$$T(x \oplus y) = Ax \oplus Dy. \qquad (5.\ 5)$$

Γράφουμε τότε

$$T = A \oplus D$$

και καλούμε τον $T$ *ευθύ άθροισμα* των $A$ και $D$.

Ένας άλλος τρόπος να δούμε τα παραπάνω είναι ο εξής: αν μας δοθεί ο κλειστός υποχώρος $M$ και ο τελεστής $T$, ορίζονται οι τελεστές

$$A : M \to M, \quad B : M^\perp \to M, \quad C : M \to M^\perp, \quad D : M^\perp \to M^\perp$$

ώστε

$$T(x \oplus y) = (Ax + By) \oplus (Cx + Dy), \qquad x \in M, \ y \in M^\perp.$$

Γράφουμε τότε

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Ο $M$ ανάγει τον $M$ αν και μόνο αν $B = 0$ και $C = 0$, οπότε

$$T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

δηλαδή ο $T$ έχει διαγώνια μπλοκ μορφή. Γράφουμε επίσης τότε

$$T = A \oplus D \, . \qquad (5.\ 6)$$

Αν μας δοθεί ένας τελεστής $T$ και μπορέσουμε να βρούμε έναν κλειστό υποχώρο $M$ που ανάγεται από τον $T$, τότε ορίζονται οι παραπάνω τελεστές $A$ και $D$ και η μελέτη του $T$ ανάγεται πλήρως στην μελέτη των $A$ και $D$.

**Παράδειγμα 5.1.2** Αν $P$ είναι η ορθογώνια προβολή πάνω στον $M$ τότε η $P$ ανάγει τον $M$ και ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$ έχουμε $P = I \oplus 0$.

**Λήμμα 5.1.3** *Έστω $T$ αυτοσυζυγής. Αν ο $T$ αφήνει αναλλοίωτο τον κλειστό υπόχωρο $M$ τότε ανάγει τον $M$. Ειδικότερα ο $T$ ανάγει όλους τους ιδιοχώρους του.*

*Απόδειξη.* Πρέπει να δείξουμεξ ότι ο $T$ αφήνει αναλλοίωτο τον $M^{\perp}$. Έστω λοιπόν $y \in M^{\perp}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $Ty \in M^{\perp}$, οπότε θεωρούμε τυχόν $x \in M$. Τότε $Tx \in M$ και άρα $x \in M$ έχουμε

$$\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle = 0.$$

Άρα $Ty \in M^{\perp}$. □

**Παρατήρηση 5.1.4** *Έστω $\lambda$ ιδιοτιμή του $T$. Έστω $M_\lambda$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος και $P$ η ορθογώνια προβολή επί του $M_\lambda$. Αφού ο $M_\lambda^{\perp}$ είναι αναλλοίωτος, ο περιορισμός $\hat{T} = T|_{M^{\perp}}$ μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός τελεστής που στον χώρο Hilbert $M_\lambda^{\perp}$. Ισχύει τότε (βλ. (5. 6»*

$$T = \lambda I_{M\lambda} \oplus \hat{T}$$

*ή, ελάχιστα διαφορετικά,*

$$T = \lambda P + \hat{T}(I - P). \tag{5. 7}$$

**Λήμμα 5.1.5** *Αν ο $T$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής τότε ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $\|T\|$ και $-\|T\|$ είναι ιδιοτιμή του $T$.*

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T \neq 0$. Από το Λήμμα 4.4.2 έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)$ με $\|x_n\| = 1$ και τέτοια ώστε

$$|\langle Tx_n, x_n \rangle| \longrightarrow \|T\|.$$

Ειδικότερα η ακολουθία $(\langle Tx_n, x_n \rangle)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και άρα έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία,

$$\langle Tx_{n_k}, x_{n_k} \rangle \longrightarrow \lambda$$

όπου $|\lambda| = \|T\|$ και άρα $\lambda = \|T\|$ ή $\lambda = -\|T\|$ (αφού $\langle Tx_n, x_n \rangle \in \mathbb{R}$).
Θα αποδείξουμε ότι το $\lambda$ είναι ιδιοτιμή του $T$. Για απλότητα μετονομάζουμε την $(x_{n_k})$ σε $(x_n)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Αφού ο $T$ είναι συμπαγής, η $(Tx_n)$ έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι η ίδια η $(Tx_n)$, $Tx_n \longrightarrow y$. Έπεται τότε ότι $\lambda x_n \longrightarrow y$ και άρα

$$Tx_n \longrightarrow \lambda^{-1}Ty.$$

Συμπεραίνουμε ότι $Ty = \lambda y$ και άρα το $\lambda$ είναι ιδιοτιμή αφού $y \neq 0$. □

**Ορισμός.** Συμβολίζουμε με $\sigma_p(T)$ το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός τελεστή $T$.

**Πρόταση 5.1.6** *Αν το σύνολο $\sigma_p(T)$ είναι άπειρο τότε έχει μοναδικό σημείο συσσώρευσης το μηδέν.*

*Απόδειξη.* Αν το $\sigma_p(T)$ είναι άπειρο τότε, επειδή είναι φραγμένο (ισχύει $|\lambda| \leq \|T\|$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda$) έχει οπωσδήποτε κάποιο σημείο συσσώρευσης. Έστω ότι υπάρχει σημείο συσσώρευσης $t \neq 0$. Τότε υπάρχει ακολουθία $(\lambda_n) \subset \sigma_p(T)$ της οποίας οι όροι είναι διάφοροι ανά δύο ώστε

$$|\lambda_n| > \frac{|t|}{2} \ , \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $(\phi_n)$ τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα. Τότε για $n \neq m$ ισχύει

$$\begin{aligned} \|T\phi_n - T\phi_m\|^2 &= \|\lambda_n\phi_n - \lambda_m\phi_m\|^2 \\ &= |\ \lambda_n\ |^2 + |\ \lambda_m\ |^2 \\ &\geq \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $(T\phi_n)$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, το οποίο είναι άτοπο αφού ο $T$ είναι συμπαγής. □

**Ορισμός.** Μια αριθμήσιμη οικογένεια ορθογώνιων προβολών $(P_k)$ λέγεται πλήρης (ή επίσης λέγεται ανάλυση του ταυτοτικού τελεστή) αν οι $P_k$ είναι κάθετες ανά δύο και

$$x = \sum_n P_n x \ , \qquad x \in \mathcal{H}\,.$$

**Θεώρημα 5.1.7 (Φασματικό θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές)** *Έστω $T$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής στον απειροδιάστατο και διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.*
**Διατύπωση Α.** *Υπάρχει μία πλήρης οικογένεια ορθογώνιων προβολών $(P_k)$ πάνω σε αντίστοιχους ιδιοχώρους $M_k = \mathrm{Ker}(T - \lambda_k I)$ του $T$. Ισχύει*

$$T = \sum_k \lambda_k P_k$$

*όπου η σειρά, αν είναι άπειρη, συγκλίνει ως προς την νόρμα.*
**Διατύπωση Β.** *Υπάρχει μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $\mathcal{H}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $T$.*

*Απόδειξη.* Αν $T = 0$ τότε προφανώς ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $T \neq 0$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι το $\lambda_0 = 0$ είναι ιδιοτιμή του $T$. Συμβολίζουμε με $P_0$ την ορθογώνια προβολή στον ιδιοχώρο $M_0 = \mathrm{Ker}(T)$.

Έστω $\mathcal{H}_1 = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$, $T_1 = T|_{\mathcal{H}_1}$. Τότε κάθε $x$ γράφεται

$$x = P_0 x + (I - P_0)x$$

και τότε

$$Tx = TP_0 x + T(I - P_0)x = \lambda_0 P_0 x + T_1(I - P_0)x.$$

Δηλαδή

$$I = P_0 + (I - P_0) \quad , \qquad T = \lambda_0 P_0 + T_1(I - P_0).$$

Ο $T_1$ είναι μη-μηδενικός, συμπαγής και αυτοσυζυγής, άρα έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_1 = \pm\|T_1\| = \pm\|T\| \neq 0$. Έστω $M_1$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος και $P_1$ η ορθογώνια προβολή στον $M_1$.

(i) $M_1 = \mathcal{H}_1$. Τότε

$$I = P_0 + P_1 \qquad , \qquad T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) $M_1 \subsetneqq \mathcal{H}_1$. Θέτουμε τότε

$$\mathcal{H}_2 = M_1^{\perp, \mathcal{H}_1} = (M_0 + M_1)^{\perp}$$

Ο $T_1$ ανάγει τον $\mathcal{H}_2$. Έστω

$$T_2 = T_1 \,|_{\mathcal{H}_2} \colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2\,.$$

Έχουμε τότε

$$I = P_0 + P_1 + (I - P_0 - P_1) \qquad , \qquad T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + T_2(I - P_0 - P_1)$$

Ο $T_2$ είναι μη-μηδενικός, συμπαγής και αυτοσυζυγής. Άρα έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_2 = \pm\|T_2\|$. Έστω $M_2$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος και $P_2$ η ορθογώνια προβολή στον $M_2$.

(i) $M_2 = \mathcal{H}_2$. Τότε

$$I = P_0 + P_1 + P_2 \qquad , \qquad T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$$

και έχουμε το ζητούμενο.

(ii) $M_2 \subsetneqq \mathcal{H}_2$. Θέτουμε τότε

$$\mathcal{H}_3 = M_2^{\perp, \mathcal{H}_2} = (M_0 + M_1 + M_2)^{\perp}$$

Ο $T_2$ ανάγει τον $M_2$. Έστω

$$T_3 = T_2 \,|_{\mathcal{H}_3} = T \,|_{\mathcal{H}_3} \colon \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_3$$

Έχουμε τότε

$$I = P_0 + P_1 + P_2 + (I - P_0 - P_1 - P_2)\ , \qquad T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + T_3(I - P_0 - P_1 - P_2).$$

Συνεχίζουμε κατά αυτόν τον τρόπο. Ορίζεται έτσι μία ακολουθία ιδιοτιμών $(\lambda_k)$. Κάθε ιδιοτιμή έχει ιδιοχώρο $M_k$ και $P_k$ είναι η ορθογώνια προβολή στον $M_k$. Για κάθε $k$ έχουμε

$$\mathcal{H}_k = (M_1 + M_2 + \dots M_{k-1})^{\perp}\ , \quad T_k = T|_{\mathcal{H}_k}\ , \qquad \lambda_k = \pm\|T_k\|\,.$$

Άρα η ακολουθία $(\lambda_k)$ με εξαίρεση το $\lambda_0 = 0$, είναι φθίνουσα κατ΄ απόλυτη τιμή, αφού

$$|\lambda_{k+1}| = \|T_{k+1}\| = \|T_k|_{\mathcal{H}_{k+1}}\| \leq \|T_k\| = |\lambda_k|\,.$$

Επίσης έχουμε

$$I = P_0 + P_1 + \dots + P_n + (I - P_0 - P_1 - P_2 - \dots P_n) \ \ \text{(ανά δύο κάθετες προβολές)}$$
$$T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n + T_{n+1}(I - \sum_{k=0}^{n} P_k).$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

(i) Η διαδικασία τερματίζεται. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$I = P_0 + P_1 + \dots + P_m \qquad , \qquad T = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m.$$

Είναι φανερό ότι έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Η διαδικασία συνεχίζεται επ΄ άπειρον. Η ακολουθία $(\lambda_n)$ είναι τότε άπειρη και άρα μηδενική. Ισχύει τότε

$$\{\lambda_n\ :\ n \geq 0\} = \sigma_p(T)$$

αφού η παραπάνω διαδικασία εξαντλεί όλες τις ιδιοτιμές του $T$ (εδώ χρησιμοποιούμε και την Πρόταση 5.1.6)

Ισχυριζόμαστε ότι η οικογένεια $(P_k)_{k=0}^{\infty}$ είναι μία πλήρης οικογένεια προβολών και

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k P_k.$$

Για την πληρότητα, αρκεί να δείξουμε ότι $(\cup M_k)^{\perp} = \{0\}$. Πράγματι, έστω πως όχι. Τότε ο

$$F = (\cup M_k)^{\perp}$$

είναι μη-τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος (γιατί;). Ο περιορισμός $T|_F$ είναι τότε συμπαγής και αυτοσυζυγής. Άρα έχει μία ιδιοτιμή $\lambda$. Τότε το $\lambda$ είναι και ιδιοτιμή του $T$, άρα είναι κάποιο από τα $\lambda_k$ και ο αντίστοιχος υπόχωρος είναι ο $M_k$. Άτοπο.

Δείχνουμε τέλος ότι

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k\ ,$$

όπου η σειρά συγκλίνει κατά νόρμα. Έστω λοιπόν

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$$

η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς. Έστω $x \in \mathcal{H}$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned} \|Tx - S_n x\| &= \Big\| T_{n+1}\big(I - \sum_{k=0}^{n} P_k\big)x \Big\| \\ &\leq \|T_{n+1}\| \, \|x\| \\ &= |\lambda_{n+1}| \, \|x\| \, . \end{aligned}$$

Άρα

$$\|T - S_n\| \leq |\lambda_{n+1}| \to 0 \, .$$

Συνεπώς έχουμε αποδείξει την πρώτη διατύπωση του θεωρήματος στην περίπτωση όπου το μηδέν είναι ιδιοτιμή του $T$. Στην περίπτωση όπου δεν είναι τα πράγματα είναι παρόμοια, ξεκινάμε όμως τη σειρά από $k = 1$.

Αποδεικνύουμε τώρα τη δεύτερη διατύπωση. Για κάθε έναν ιδιοχώρο $M_k$ θεωρούμε μία ανίστοιχη ορθοκανονική βάση του και στη συνέχεια θεωρούμε την ένωση όλων αυτών των βάσεων, η οποία είναι ένα άπειρο, αριθμήσιμο, ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Κάθε $e_n$ είναι ιδιοδιάνυσμα, και μένει μόνό να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι και πλήρες. Αυτό όμως είναι άμεση συνέπεια του της πληρότητας του συστήματος προβολών $\{P_k\}$.

$\square$