Ερωτήσεις από το μάθημα της Πέμπτης 10/1/2019

1. Αν μια συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ παίρνει πραγματικές [αντιστοίχως, μη αρνητικές] τιμές στο $[a,b]$, μπορώ να βρώ ακολουθία πραγματικών [αντιστοίχως, μη αρνητικών] πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$;

2. Έστω $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $A_n x \longrightarrow Ax$ για κάθε $x \in H$. Αν κάθε A_n είναι αυτοσυζυγής [αντιστοίχως, θετικός] τότε εύκολα (;) φαίνεται ότι το ίδιο ισχύει και για τον A.

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα δεν ισχύει όταν η (A_n) αποτελείται από φυσιολογικούς τελεστές, ούτε καν όταν αποτελείται από unitary τελεστές.

Ένα παράδειγμα είναι το ακόλουθο: αν $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H, θέτουμε

$$U_n(e_k) := \begin{cases} e_{k+1}, & 1 \le k \le n-1 \\ e_1, & k = n \\ e_k, & k > n \end{cases}$$

Με άλλη διατύπωση,

$$U_n = V_n P_n + P_n^{\perp}$$

όπου P_n η προβολή στον χώρο που παράγεται από τα $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ και

$V_n : \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \to \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ ο τελεστής με πίνακα

$$V_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι κάθε U_n είναι unitary τελεστής και ότι $\lim_n \|U_n x - Sx\| = 0$ για κάθε $x \in H$, όπου S ο τελεστής που ικανοποιεί $S(e_k) = e_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.