Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV

1. Έστω $H = H_0 \oplus H_0$ όπου $H_0 = \ell^2$. Ορίζουμε $M = H_0 \oplus \{0\}$ και $N = \mathrm{Gr}(D_a) := \{x \oplus D_a x : x \in H_0\}$ όπου $D_a \in \mathcal{B}(H_0)$ ο τελεστής $\mathrm{diag}(\frac{1}{n})$.

Δείξτε ότι οι M και N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, αλλά ο $M + N$ δεν είναι κλειστός.

2. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Αν S_A είναι η προβολή στον υπόχωρο $\overline{A(H)}$, τότε
(α) η $S_A^{\perp} := I - S_A$ είναι η προβολή στον $\ker A$
(β) $S_A A = A$
(γ) αν P είναι προβολή με $PA = A$, τότε $PS_A = S_A$
(δηλ. η S_A είναι η μικρότερη προβολή P που ικανοποιεί $PA = A$).

3. (α) Αν x_n είναι κάθετα ανά δύο διανύσματα ενός χώρου Hilbert H, τότε η σειρά $\sum_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνον αν $\sum \|x_n\|^2 < \infty$.

(β) Αν H_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι του H, τότε ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει κάθε H_n είναι ο

$$\left\{ \sum_n x_n : x_n \in H_n, \sum \|x_n\|^2 < \infty \right\}.$$

4. (α) Να δειχθεί ότι ο μόνος πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f στον $L^2([0,1])$ που έχει πεπερασμένη τάξη είναι ο 0.

(β) Μπορεί ο M_f να είναι συμπαγής;

5. Στον χώρο Hilbert ℓ^2, θεωρούμε τον τελεστή της μετατόπισης S (με $Se_n = e_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$). Να δειχθεί ότι ο S προσεγγίζεται κατά σημείο από τελεστές πεπερασμένης τάξης, όχι όμως στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(\ell^2)$.

6. Έστω H χώρος Hilbert, $B \in \mathcal{K}(H)$. Αν $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A_n x - Ax\| \to 0$ για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\|A_n B - AB\| \to 0$. [*Σχόλιο: Δεν ισχύει εν γένει ότι* $\|BA_n - BA\| \to 0$.]

Αν $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών και $P = \vee P_n$ είναι η προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$, δείξτε ότι $\|BP_n - BP\| \to 0$ και $\|P_n B P_n - PBP\| \to 0$.

7. Αν ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, δείξτε ότι μπορούν να βρεθούν προβολές P_n πεπερασμένης τάξης ώστε $\vee P_n = I$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δώστε μια άλλη απόδειξη ότι κάθε συμπαγής τελεστής στον H προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης.

8. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{F}(H)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

9. Αν H, K είναι χώροι Hilbert θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus K)$ με $T = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.