Μια σημείωση για τις προβολές σε χώρους Hilbert

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, έχουμε δείξει (θεώρημα 1.5.6) ότι $H = M \oplus M^{\perp}$, δηλαδή κάθε $x \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = x_M + x_N$ όπου $x_M \in M$ και $x_N \in M^{\perp}$. Έπεται ότι η (καλά ορισμένη) απεικόνιση $P_M : H \to H : x \to x_M$ είναι γραμμική, και λέγεται η **(ορθή) προβολή επί του** M. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα προκύπτει ότι $\|x_M\| \leq \|x\|$, οπότε η P_M είναι συνεχής, μάλιστα $\|P_M\| = 1$, αν $M \neq \{0\}$. Από την σχέση $(I - P_M)x = x_N$ φαίνεται ότι η $I - P_M$ είναι η (ορθή) προβολή επί του $M^{\perp}$, άρα $\|I - P_M\| \leq 1$.

Επίσης, το x_M είναι το πλησιέστερο προς το x σημείο του M (διότι κάθε σημείο $y \in M$ ικανοποιεί $(I - P_M)y = 0$, οπότε $\|x - P_M x\| = \|(I - P_M)x - (I - P_M)y\| = \|(I - P_M)(x - y)\| \leq \|x - y\|$. Πράγματι λοιπόν η P_M είναι η απεικόνιση που ορίσθηκε με την Πρόταση 1.5.1.

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι το σύνολο τιμών $\operatorname{im} P_M$ της P_M είναι ο M και ότι ο πυρήνας $\ker P_M$ είναι ο $M^{\perp}$. [1]

Ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση $P : H \to H$, ισχύει ότι $x \in \operatorname{im} P$, δηλαδή $x = Py$ για κάποιο $y \in H$, αν και μόνον αν $x = Px$ (διότι $Px = P(Py) = Py = x$), δηλαδή αν και μόνον αν $(I - P)x = 0$. Με άλλα λόγια, $\operatorname{im} P = \ker(I - P)$.

Πρόταση 1 *Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλαδή $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Απόδειξη (α) $\Rightarrow$ (β) Προφανές, αφού $\operatorname{im} P_M = M$ και $\ker P_M = M^{\perp}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Κάθε $x \in H$ γράφεται $x = Px + (I - P)x$. Όμως $Px \in \operatorname{im} P$ και $(I - P)x \in \ker P$ (γιατί $P(I - P)x = Px - P^2 x = 0$), συνεπώς είναι κάθετα από την υπόθεση. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε λοιπόν

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 \geq \|Px\|^2$$

δηλαδή $\|Px\| \leq \|x\|$, πράγμα που σημαίνει ότι $\|P\| \leq 1$.

(γ) $\Rightarrow$(α) Θέτω $M = \operatorname{im} P$. Επειδή $\operatorname{im} P = \ker(I - P)$ και η $I - P$ είναι συνεχής, ο M είναι κλειστός υπόχωρος. Ισχυρίζομαι ότι $P = P_M$. Πρέπει λοιπόν να δείξω ότι $(\ker P)^{\perp} = M$.

Έστω $x \in (\ker P)^{\perp}$. Επειδή $(I - P)x \in \ker P$, έχουμε $x \perp (I - P)x$. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα,

$$\|x\|^2 + \|(I - P)x\|^2 = \|x - (I - P)x\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|x\|^2$$

αφού $\|P\| \leq 1$. Έπεται ότι $\|(I - P)x\| = 0$, άρα $(I - P)x = 0$, δηλαδή $x = Px \in M$. Επομένως $(\ker P)^{\perp} \subseteq M$.

Αν $(\ker P)^{\perp} \subsetneq M$, υπάρχει μη μηδενικό $y \in M$ κάθετο στον $(\ker P)^{\perp}$. Δηλαδή $y \in (\ker P)^{\perp\perp} = \ker P$ (ο $\ker P$ είναι κλειστός υπόχωρος, αφού P συνεχής). Έχουμε λοιπόν $y \in \ker P \cap \operatorname{im} P = \{0\}$ ενώ υποθέσαμε ότι $y \neq 0$. Άρα λοιπόν $(\ker P)^{\perp} = M$. $\square$

[1] Κάθε $Px = x_M$ ανήκει στον M, άρα $\operatorname{im} P_M \subseteq M$, και αν $x \in M$ τότε $x_M = x$ δηλαδή $x = P(x)$, άρα $M \subseteq \operatorname{im} P_M$. Επίσης, αν $x \in M^{\perp}$ τότε $x = x_N$ άρα $Px = 0$ και αν $Px = 0$ τότε $x = x_N \in M^{\perp}$.

Η επόμενη Πρόταση χαρακτηρίζει τις προβολές σε έναν χώρο Hilbert σε σχέση με τις διάφορες κατηγορίες τελεστών που έχουμε ορίσει. Ο χαρακτηρισμός που χρησιμοποιείται πιο συχνά προκύπτει από την (α) $\iff$ (ε):

> *Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.*

Πρόταση 2 *Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(a) Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{im} P$.

(δ) Ο P είναι θετικός.

(ϵ) Ο P είναι αυτοσυζυγής.

(ζ) Ο P είναι φυσιολογικός.

Απόδειξη (α) ⇒ (δ) Αν $z \in H$, έχουμε $(I-P)z \in \ker P$ και $Pz \in \operatorname{im} P$, άρα $\langle Pz, (I-P)z\rangle = 0$, δηλαδή $\langle Pz, z\rangle = \langle Pz, Pz\rangle$, επομένως $\langle Pz, z\rangle \geq 0$. Αφού το z είναι τυχόν, δείξαμε ότι $P \geq 0$.

Οι συνεπαγωγές **(δ)** $\Rightarrow$ **(ε)** $\Rightarrow$ **(ζ)** είναι προφανείς: κάθε θετικός τελεστής είναι αυτοσυζυγής και κάθε αυτοσυζυγής είναι φυσιολογικός.

Μένει να δειχθεί η **(ζ)** $\Rightarrow$ **(α)**: Από την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι αν ο P είναι φυσιολογικός, τότε $(\ker P)\perp(\operatorname{im} P)$.

Έστω λοιπόν $x \in \ker P$ και $y = Pz \in \operatorname{im} P$. Επειδή ο P είναι φυσιολογικός, ισχύει $\|Px\| = \|P^*x\|$ (Πρόταση 2.4.5), άρα $P^*x = 0$. Συνεπώς

$$\langle x, y\rangle = \langle x, Pz\rangle = \langle P^*x, z\rangle = 0.$$

Επομένως $(\ker P)\perp(\operatorname{im} P)$. $\square$

Παρατήρηση 3 *Η απεικόνιση $M \to P_M = P(M)$ είναι λοιπόν μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert και του συνόλου*

$$\mathcal{P}(H) = \{P \in \mathcal{B}(H) : P^2 = P^* = P\}$$

των (ορθών) προβολών, με αντίστροφη την $P \to \operatorname{im} P$. Είναι φανερό ότι

$$P(\{0\}) = 0,\ P(H) = I \ \text{ και } P(M^\perp) = I - P(M).$$

Παρατήρηση 4 *Αξίζει να απομονώσουμε δυο χρήσιμες ιδιότητες κάθε ορθής προβολής P:*
(a) Για κάθε $x \in H$ ισχύει η $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$.
(β) Αν $\|Py\| = \|y\|$ τότε $Py = y$.

Πράγματι, για το (α) έχουμε $\langle Px, x\rangle = \langle PPx, x\rangle = \langle Px, P^*x\rangle = \langle Px, Px\rangle$.

Για το (β), αφού τα Py και $(I-P)y$ είναι κάθετα, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\|y\|^2 = \|Py\|^2 + \|(I-P)y\|^2 .$$

άρα, η υπόθεση $\|Py\|^2 = \|y\|^2$ δίνει $\|(I-P)y\|^2 = 0$ άρα $(I-P)y = 0$ δηλαδή $Py = y$.