Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις II

1. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$vu^* = \Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle v$$

- Δείξτε ότι κάθε τέτοιος τελεστής είναι φραγμένος, και βρείτε τη νόρμα του.
- Δείξτε ότι ο συζυγής είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$
- Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0?
- Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}$, $u_k \in E, v_k \in F$.
- Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F.
- Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές;

2. Δείξτε ότι κάθε συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f \in C_b(\mathbb{R})$ ορίζει φραγμένο τελεστή $M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ με νόρμα $\|M_f\| = \|f\|_\infty$ (Προαιρετικά: ίδια ερώτηση όταν η f είναι φραγμένη και μετρήσιμη).
Δείξτε επίσης ότι ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

3. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ είναι ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert, εξετάστε αν υπάρχει φραγμένος τελεστής $A : H \to H$ ώστε

(a) $Ax_n = \cos(n) x_{4n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(b) $Ax_n = e^n x_{4n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4. Έστω $[a_{ij}]$ ένας $\infty \times \infty$ πίνακας μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε

$$\left| \sum_{i,j} \lambda_i a_{ij} \mu_j \right|^2 \le M^2 \sum_i |\lambda_i|^2 \sum_j |\mu_j|^2 \qquad (*)$$

για κάθε $(\lambda_i), (\mu_i) \in c_{00}$.
Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ώστε $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.
Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο συμπέρασμα αν, αντί για την (*), υποθέσουμε ότι ισχύει η ανισότητα $|a_{ij}| \le M$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.

5. Έστω $T : H_1 \to H_2$ φραγμένος τελεστής, όπου H_1, H_2 είναι (διαχωρίσιμοι) χώροι Hilbert με ορθοκανονικές βάσεις $\{e_i\}$ και $\{f_i\}$ αντίστοιχα. Δείξτε απευθείας ότι ο πίνακας $[b_{ij}]$ με $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ όπου $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$ ορίζει φραγμένο τελεστή $S : H_2 \to H_1$ από τη σχέση $b_{ij} = \langle Sf_j, e_i \rangle$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $S = T^*$.

6. *Ο χώρος του Hardy H^2.*
Είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων που έχουν δυναμοσειρές με συντελεστές τετραγωνικά αθροίσιμους: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 := \|f\|^2 < +\infty$. [1]
Δείξτε ότι ο $(H^2, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Hilbert. Για κάθε $z \in \mathbb{D}$, βρείτε μια $k_z \in H^2$ ώστε $f(z) = \langle f, k_z \rangle$.
Δείξτε ότι η απεικόνιση T που ορίζεται από τη σχέση $(Tf)(z) = zf(z)$, $f \in H^2$ ορίζει φραγμένο τελεστή $T : H^2 \to H^2$ και βρείτε τον συζυγή του.

7. Αν ο τελεστής $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ορίζεται από την σχέση $T(x_1, x_2) = (0, x_1)$, δείξτε ότι $\|T\| = 1$ ενώ $\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2, \|x\| \le 1\} = \sup\{|x_1 \bar{x}_2| : |x_1|^2 + |x_2|^2 \le 1\} = 1/2$.

[1] Τέτοιες δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1, επομένως ορίζουν συναρτήσεις ολόμορφες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.