Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις V

1. *Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους. Δείξτε επίσης ότι $|A| = A_+ + A_-$.*

Απόδειξη. Σύντομη λύση: Ορίζω τη συνάρτηση $f_+ : \sigma_p(A) \to \mathbb{R}$ από τις σχέσεις $f_+(\lambda) = \lambda$ όταν $\lambda \geq 0$ και $f_+(\lambda) = 0$ όταν $\lambda < 0$. Εφαρμόζοντας τον Συναρτησιακό Λογισμό, θέτω $A_+ := f_+(A)$ και $A_- := f_-(A)$ όπου $f_-(\lambda) = f_+(\lambda) - \lambda$. Όλα τα ζητούμενα προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες της f_+ και του Συναρτησιακού Λογισμού.

Απευθείας απόδειξη: Ονομάζω P_+ την προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγεται από όλα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές $\lambda \geq 0$. Η προβολή αυτή μετατίθεται με τον A, και μάλιστα με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A (αφού η P_+ είναι προβολή στο ευθύ άθροισμα κάποιων ιδιοχώρων, και κάθε προβολή P_λ έχει την ιδιότητα αυτήν). Θέτω

$$A_+ := AP_+ \quad \text{και} \quad A_- := A_+ - A$$

οπότε είναι φανερό ότι $A = A_+ - A_-$ και ότι οι A_+, A_- μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους. Επίσης $A_+A_- = AP_+(AP_+ - A) = A^2P_+(P_+ - I) = 0$ και άρα $A_-A_+ = A_+A_- = 0$.

Αν γράψω $A = \sum_{\lambda\in\sigma} \lambda P_\lambda$ (όπου $\sigma = \sigma_p(A)$) από το Φασματικό Θεώρημα, έχω $A_+ = \sum_{\lambda\in\sigma^+} \lambda P_\lambda$ όπου $\sigma^+ = \sigma \cap \mathbb{R}_+$, άρα ο A_+ είναι θετικός τελεστής, ως όριο αθροισμάτων των θετικών τελεστών λP_λ. Επίσης $A_- = \sum_{\lambda\in\sigma^-} (-\lambda)P_\lambda$ όπου $\sigma^- = \sigma \setminus \sigma^+$, άρα ο A_+ είναι θετικός τελεστής για τον ίδιο λόγο.

Τέλος

$$A_+ + A_- = \sum_{\lambda\in\sigma^+} \lambda P_\lambda + \sum_{\lambda\in\sigma^-} (-\lambda)P_\lambda = \sum_{\lambda\in\sigma} |\lambda| P_\lambda$$

$$\text{άρα} \quad (A_+ + A_-)^2 = \left(\sum_{\lambda\in\sigma} |\lambda| P_\lambda \right)^2 \overset{(*)}{=} \sum_{\lambda\in\sigma} \lambda^2 P_\lambda = A^2 = A^*A$$

και άρα $A_+ + A_- = (A^*A)^{1/2} = |A|$ από τη μοναδικότητα της θετικής τετραγωνικής ρίζας.
(*) Χρησιμοποιήθηκε ότι η σειρά συγκλίνει και ότι οι προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο.

2. *Έστω H χώρος Hilbert και $K \in \mathcal{K}(H)$.*

(α) Αν $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A_nx - Ax\| \to 0$ για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\|A_nK - AK\| \to 0$.
[Σχόλιο: Δεν ισχύει εν γένει ότι $\|KA_n - KA\| \to 0$.]

(β) Αν $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών και $P = \vee P_n$ είναι η προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$, δείξτε ότι $\|KP_n - KP\| \to 0$ και $\|P_nKP_n - PKP\| \to 0$.

Απόδειξη. (α) Για οικονομία, γράφω $C_n = A_n - A$, οπότε έχω ότι $\|C_nx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$. Επομένως $\|C_nKx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$ (δηλ. κατά σημείο) και θέλουμε να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στην μπάλα B_H του H.

Αφού ο K είναι συμπαγής, η εικόνα $K(B_H)$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in B_H$ ώστε οι ανοικτές μπάλες με κέντρα τα Kx_k και ακτίνα ϵ να καλύπτουν το $K(B_H)$: για κάθε $x \in B_H$ υπάρχει $k = 1, \ldots, m$ ώστε $\|Kx - Kx_k\| < \epsilon$.

Επειδή $\lim_n \|C_nKx_k\| \to 0$ για κάθε k, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|C_nKx_k\| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $k = 1, \ldots, m$.

Έστω τώρα $n \geq n_0$ και $x \in B_H$. Επιλέγω $k = 1, \ldots, m$ ώστε $\|Kx - Kx_k\| < \epsilon$ και υπολογίζω:

$$\|C_nKx\| \leq \|C_nKx - C_nKx_k\| + \|C_nKx_k\| \leq \|C_n\| \, \|Kx - Kx_k\| + \|C_nKx_k\| < \|C_n\|\epsilon + \epsilon$$

Τώρα για κάθε $y \in H$ η ακολουθία $(C_n y)$ είναι συγκλίνουσα, άρα φραγμένη: υπάρχει $M(y) < \infty$ ώστε $\sup_n \|C_n y\| \leq M(y)$. Επειδή ο H είναι χώρος Banach, έπεται από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος ότι η (C_n) είναι (ομοιόμορφα) φραγμένη: υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\sup_n \|C_n\| \leq M$. Επομένως η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$\|C_n K x\| \leq M\epsilon + \epsilon$$

για κάθε $x \in B_H$, άρα $\|C_n K\| < (M+1)\epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\|C_n K\| \to 0$.

Παρατήρηση. Αν ξέρουμε από πριν ότι η ακολουθία (A_n) είναι (ομοιόμορφα) φραγμένη, όπως για παράδειγμα στην (2β) ή στην (3), δεν χρειάζεται η αρχή ομοιομόρφου φράγματος.

Παράδειγμα. Θέτουμε

$$A_n : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \dots) \to (x_n, x_{n+1}, \dots).$$

Έχουμε $\lim_n \|A_n x\|^2 = \lim_n \sum_{k \geq n} |x_k|^2 = 0$ για κάθε $x \in \ell^2$.

Θέτουμε επίσης $K = P(e_1)$: είναι συμπαγής τελεστής, μάλιστα πεπερασμένης (πρώτης!) τάξης. Παρατηρούμε όμως ότι $A_n^* = S^n$ άρα $A_n^* e_1 = e_n$ και συνεπώς

$$\|KA_n\| = \|A_n^* K^*\| \geq \|A_n^* K^* e_1\| = \|A_n^* e_1\| = \|e_n\| = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, δεν ισχύει πάντα ότι $\|KA_n - KA\| \to 0$.

(β) Αν συμβεί οι A_n να είναι αυτοσυζυγείς τελεστές, τότε εφαρμόζοντας την "$\|A_n K - AK\| \to 0$ για κάθε συμπαγή K" στον *συμπαγή τελεστή* K^* έχουμε ότι $\|A_n K^* - AK^*\| \to 0$ και επομένως $\|KA_n - KA\| = \|A_n K^* - AK^*\| \to 0$, για κάθε συμπαγή K.

Αυτό συμβαίνει ειδικότερα όταν οι $A_n = P_n$ είναι προβολές. Ξέρουμε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία προβολών συγκλίνει *κατά σημείο* στην προβολή P στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$. Κατά συνέπεια από τα προηγούμενα (μάλιστα χωρίς χρήση της αρχής ομοιομόρφου φράγματος, αφού $\|P_n\| \leq 1$ για κάθε n) έχουμε $\|P_n K - PK\| \to 0$ και $\|KP_n - KP\| \to 0$, οπότε

$$\begin{aligned}
\|P_n K P_n - PKP\| &\leq \|P_n K P_n - PKP_n\| + \|PKP_n - PKP\| \\
&\leq \|P_n K - PK\| \|P_n\| + \|P\| \|KP_n - KP\| \\
&\leq \|P_n K - PK\| + \|KP_n - KP\| \to 0
\end{aligned}$$

3. *Αν ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, δείξτε ότι μπορούν να βρεθούν προβολές P_n πεπερασμένης τάξης ώστε $\vee P_n = I$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δώστε μια άλλη απόδειξη ότι κάθε συμπαγής τελεστής στον H προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης.*

Απόδειξη. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k$$

Συνεπώς αν ονομάσουμε P_n την προβολή στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, η προηγούμενη σχέση γράφεται $\|P_n x - x\| \to 0$. Έχουμε λοιπόν μια αύξουσα (γιατί $\mathrm{im}(P_n) \subseteq \mathrm{im}(P_{n+1})$) ακολουθία προβολών που τείνει κατά σημείο στον ταυτοτικό τελεστή I.

Επομένως από την Άσκηση 2(β) έχουμε $\|P_n K - K\| \to 0$. Αλλά κάθε $\|P_n K\|$ εχει πεπερασμένη τάξη (το πολύ n) καθώς $\mathrm{im}(P_n K) \subseteq \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$.

4. *Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{F}(H)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.*

Απόδειξη. Για κάθε $x, y \in H$ θεωρούμε τον τελεστή $T = y \otimes x^*$ που ορίζεται από τη σχέση

$$Tz = (y \otimes x^*)(z) = \langle z, x\rangle y, \quad z \in H.$$

Έχουμε, για κάθε $z \in H$,

$$\begin{aligned} ATz = TBz \quad &\iff \quad A(\langle z, x\rangle y) = \langle Bz, x\rangle y \\ &\iff \quad \langle z, x\rangle Ay = \langle Bz, x\rangle y \end{aligned}$$

Επομένως αν θέσουμε $x = z \neq 0$ προκύπτει

$$\|x\|^2 Ay = \langle Bx, x\rangle y \Rightarrow Ay = \frac{\langle Bx, x\rangle}{\|x\|^2} y \quad \text{για κάθε } y \in H \tag{*}$$

Αν σταθεροποιήσουμε ένα μοναδιαίο $x_0 \in H$ και θέσουμε $\lambda = \langle Bx_0, x_0\rangle$ τότε από την (*) έχουμε

$$Ay = \lambda y \quad \text{για κάθε } y \in H,$$

δηλαδή $A = \lambda I$.

Αλλά επίσης από την (*)

$$\frac{\langle Bx, x\rangle}{\langle x, x\rangle} y = Ay = \lambda y \quad \text{για κάθε } y \in H$$

άρα $\langle Bx, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle$ για κάθε $x \neq 0$ άρα και για κάθε $x \in H$, οπότε (polarization) $\langle Bx, u\rangle = \langle \lambda x, u\rangle$ για κάθε $x, u \in H$, άρα $B = \lambda I$.

Αλλιώς: Τώρα που δείξαμε ότι $A = \lambda I$, η υπόθεση γίνεται $\lambda T = TB$ για κάθε φραγμένο τελεστή T πρώτης τάξης. Αν $B \neq \lambda I$, υπάρχει $x \in H$ ώστε $y := (B - \lambda)x \neq 0$. Όμως, αν ονομάσουμε T τον τελεστή που προβάλλει στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο span(y), θα έχουμε $Ty = y \neq 0$, δηλαδή $TBx - \lambda Tx \neq 0$, ενώ $TB = \lambda T$, άτοπο.

5. *Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δυο και παράγουν τον H.*

Απόδειξη Προφανώς τα a_n είναι ιδιοτιμές του A. Δείχνουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες:
Αν $x \in H \setminus \{0\}$ ώστε $Ax = \lambda x$, τότε γράφοντας $x = \sum\langle x, e_k\rangle e_k$ έχουμε $(A - \lambda I)x = 0$ δηλαδή $\sum\langle x, e_k\rangle(A - \lambda I)e_k = 0$ άρα $\sum\langle x, e_k\rangle(a_k - \lambda)e_k = 0$ άρα $\sum |\langle x, e_k\rangle|^2|a_k - \lambda|^2 = 0$ οπότε

$$|\langle x, e_k\rangle|\,|a_k - \lambda| = 0 \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}\,. \tag{*}$$

Αφού $x \neq 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\langle x, e_n\rangle \neq 0$. Για κάθε τέτοιο n όμως η (*) δείχνει ότι $|a_n - \lambda| = 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\lambda = a_n$ για κάποιο n.

Επίσης όμως, παρατηρούμε το εξής: Η σχέση $x = \sum\langle x, e_k\rangle e_k$ δείχνει ότι το x ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη εκείνων των e_n για τα οποία $\langle x, e_n\rangle \neq 0$, οπότε $|a_n - \lambda| = 0$ από την (*). Δηλαδή

$$x \in \overline{\text{span}\{e_n : \langle x, e_n\rangle \neq 0\}} \subseteq \overline{\text{span}\{e_n : a_n = \lambda\}}$$

για κάθε $x \in M_\lambda$, και άρα $M_\lambda \subseteq \overline{\text{span}\{e_n : a_n = \lambda\}}$.

Από την άλλη μεριά, αν $a_n = \lambda$, τότε βέβαια $e_n \in M_\lambda$. Συνεπώς, αφού ο M_λ είναι υπόχωρος και κλειστός, $\overline{\text{span}\{e_n : a_n = \lambda\}} \subseteq M_\lambda$ και έχουμε ισότητα:

$$M_\lambda = \overline{\text{span}\{e_n : a_n = \lambda\}}$$

Τα υπόλοιπα είνα άμεσα από την ισότητα αυτή: Αν λ, μ είναι δυο διαφορετικές ιδιοτιμές, τα ορθοκανονικά σύνολα $\{e_n : a_n = \lambda\}$ και $\{e_n : a_n = \mu\}$ είναι ξένα, άρα οι υπόχωροι M_λ και M_μ, που έχουν τα σύνολα αυτά ως ορθοκανονικές βάσεις, είναι κάθετοι. Και τέλος, η κλειστή γραμμική θήκη των $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ περιέχει όλην την $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, άρα είναι όλος ο χώρος H.

6. *Αν ένας τελεστής A γράφεται $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i^* = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i \otimes v_i^*$, όπου $(x_n), (y_n), (u_n)$ και (v_n) είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και $(\lambda_i), (\mu_i)$ είναι φθίνουσες μηδενικές ακολουθίες θετικών αριθμών, δείξτε ότι $(\lambda_n) = (\mu_n)$. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum_n \lambda_n$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται* τελεστής ίχνους (trace class operator) *ή καμιά φορά* πυρηνικός τελεστής (nuclear operator).

Απόδειξη Αφού οι $(\lambda_i), (\mu_i)$ είναι φθίνουσες ακολουθίες, αρκεί να δείξω ότι τα σύνολα $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ και $\{\mu_i : i \in \mathbb{N}\}$ ταυτίζονται.

Από την $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i^*$ έχουμε $Ay_i = \lambda_i x_i$ και $A^* x_i = \bar{\lambda} y_i$, άρα $A^*Ay_i = \lambda_i A^* x_i = |\lambda_i|^2 y_i$. Γράφω $B = A^*A$ για ευκολία. Αφού $|\lambda_i|^2 > 0$, έπεται ότι $y_i = |\lambda_i|^{-2} By_i \in \text{im}B = (\ker B)^\perp$ για κάθε i, άρα $\overline{\text{span}\{y_i : i \in \mathbb{N}\}} \subseteq (\ker B)^\perp$ και αντίστροφα αν $\langle y, y_i \rangle = 0$ για κάθε i τότε $By = \sum_i |\lambda_i|^2 \langle y_i, y \rangle y_i = 0$ άρα $y \in \ker B = (\ker B)^{\perp\perp}$. Δηλαδή η $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $(\ker B)^\perp$.

Αφού $By_i = |\lambda_i|^2 y_i$ για κάθε i, από την Άσκηση 5 προκύπτει ότι το σύνολο $\{|\lambda_i|^2 : i \in \mathbb{N}\}$ είναι το σύνολο όλων των μη μηδενικών ιδιοτιμών του B.

Με τα ίδια επιχειρήματα, από τη σχέση $A = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i \otimes v_i^*$ συμπεραίνουμε ότι το $\{|\mu_i|^2 : i \in \mathbb{N}\}$ είναι επίσης το σύνολο όλων των μη μηδενικών ιδιοτιμών του B.

Άρα $\{|\lambda_i|^2 : i \in \mathbb{N}\} = \{|\mu_i|^2 : i \in \mathbb{N}\}$ και συνεπώς $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\} = \{\mu_i : i \in \mathbb{N}\}$ αφού πρόκειται για θετικούς αριθμούς.

7. *Έστω H χώρος Hilbert, M και N υπόχωροι του H, με* $\dim M = k$ *και* $\dim N^\perp = k - 1$. *Δείξτε ότι $M \cap N \neq \{0\}$. [Υπόδειξη: Ένα γραμμικό σύστημα $k-1$ εξισώσεων με k αγνώστους έχει μη μηδενική λύση.]*

Απόδειξη Αν $\{u_1, \ldots, u_k\}$ είναι βάση του M και $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ είναι βάση του $N^\perp$, ζητάμε μη μηδενικό $u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_k u_k \in M$ ώστε $\langle u, x_j \rangle = 0$ για $j = 1, \ldots, k-1$. Δηλαδή ζητάμε μη μηδενική λύση $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{C}^n$ του συστήματος

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_k \langle u_k, x_j \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, k-1\,.$$

8. *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και M κλειστός υπόχωρος του H. Δείξτε ότι*

$$\sup\{\langle Ax, x \rangle : x \in M, \|x\| = 1\} = \max\{\langle Ax, x \rangle : x \in M, \|x\| = 1\}.$$

[Υπόδειξη. Εξετάστε τον συμπαγή αυτοσυζυγή τελεστή $PA|_M$, όπου P η προβολή στον M.]

Απόδειξη Γράφω $B := PA|_M \in \mathcal{B}(M)$. Για κάθε $x \in M$, έχουμε $\langle Bx, x \rangle = \langle PAx, x \rangle = \langle Ax, Px \rangle = \langle Ax, x \rangle$, οπότε $\sup\{\langle Ax, x \rangle : x \in M, \|x\| = 1\} = \sup\{\langle Bx, x \rangle : x \in M, \|x\| = 1\}$.

Από το φασματικό θεώρημα, ο B γράφεται $B = \sum_n \lambda(n) x_n \otimes x_n^*$, όπου $x_n \in M$ ορθοκανονικά και $\lambda(n) \in \mathbb{R}$. Ας θυμηθούμε ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του B έχει μέγιστο στοιχείο. Για κάθε $x \in M$ νόρμας 1 έχουμε

$$\begin{aligned}\langle Bx, x \rangle = \langle \sum_n \lambda(n) \langle x, x_n \rangle x_n, x \rangle &= \sum_n \lambda(n) \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x \rangle = \sum_n \lambda(n) |\langle x, x_n \rangle|^2 \\ &\leq \max\{\lambda_n\} \sum_n |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \max\{\lambda_n\} \sum_n \|x\|^2 = \max\{\lambda_n\}\end{aligned}$$

άρα $\sup\{\langle Bx,x\rangle : x\in M, \|x\|=1\} \le \max\{\lambda_n\}$. Από την άλλη μεριά όμως, αν $\lambda_{n_0}=\max\{\lambda_n\}$, έχουμε $Bx_{n_0}=\lambda_{n_0}x_{n_0}$ άρα $\langle Bx_{n_0},x_{n_0}\rangle=\lambda_{n_0}$, άρα $\sup\{\langle Bx,x\rangle : x\in M, \|x\|=1\} \ge \max\{\lambda_n\}$. και έχουμε ισότητα: $\sup\{\langle Bx,x\rangle : x\in M, \|x\|=1\} = \lambda_{n_0} = \max\{\langle Bx,x\rangle : x\in M, \|x\|=1\}$.

9. (*Αρχή min-max του Courant*) *Έστω $A\in\mathcal{B}(H)$ συμπαγής θετικός τελεστής, και $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^\perp$ από ιδιοδιανύσματα του A. Υπάρχουν λοιπόν θετικοί αριθμοί $\{\lambda_n : n\in\mathbb{N}\}$ ώστε $Ax_n=\lambda_n x_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Διατάσσουμε την (λ_n) κατά φθίνουσα (μη αύξουσα) σειρά: $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\dots$.*

Για κάθε υπόχωρο $V\subseteq H$, θέτουμε

$$\mu(V) := \sup\{\langle Ax,x\rangle : x\in V^\perp, \|x\|=1\}.$$

Ξέρουμε ότι

$$\|A\| = \sup\{\langle Ax,x\rangle : x\in H, \|x\|=1\} = \mu(0).$$

Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$,

$$\lambda_k = \min\{\mu(V) : \dim V = k-1\} = \min\{\max\{\langle Ax,x\rangle : x\in V^\perp, \|x\|=1\} : \dim V = k-1\}.$$

Απόδειξη Από την Άσκηση 8, ξέρουμε ότι

$$\mu(V) = \max\{\langle Ax,x\rangle : x\in V^\perp, \|x\|=1\}\,.$$

Θα δείξουμε ότι *για κάθε* υπόχωρο V του H με $\dim V=k-1$ ισχύει ότι $\mu(V)\ge\lambda_k$, και ότι *υπάρχει* υπόχωρος W διάστασης $k-1$ ώστε $\mu(W)\le\lambda_k$. Επομένως

$$\begin{aligned} &\min\{\mu(V) : \dim V = k-1\} = \lambda_k \\ \text{δηλ.}\quad &\min\{\max\{\langle Ax,x\rangle : x\in V^\perp, \|x\|=1\} : \dim V = k-1\} = \lambda_k\,. \end{aligned}$$

Θέτουμε $V_k := \text{span}\{x_n : 1\le n\le k\}$. Έστω V υπόχωρος του H με $\dim V=k-1$. Από την Άσκηση 7, υπάρχει $x\in V^\perp\cap V_k$ με $\|x\|=1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle Ax,x\rangle &= \langle\sum_{n=1}^\infty \lambda_n\langle x,x_n\rangle x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n|\langle x,x_n\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^k \lambda_n|\langle x,x_n\rangle|^2 \quad \text{γιατί } x\perp x_j \text{ όταν } j>k \\ &\ge \lambda_k\sum_{n=1}^k |\langle x,x_n\rangle|^2 = \lambda_k\|x\|^2 = \lambda_k \quad \text{γιατί } (\lambda_n) \text{ φθίνουσα} \\ \text{άρα}\quad \mu(V) &= \max\{\langle Ax,x\rangle : x\in V^\perp, \|x\|=1\} \ge \lambda_k \end{aligned}$$

για κάθε υπόχωρο V του H διάστασης $k-1$. Επομένως έχουμε

$$\inf\{\mu(V) : \dim V = k-1\} \ge \lambda_k\,.$$

Από την άλλη μεριά, αν $x\in V_{k-1}^\perp$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle Ax,x\rangle &= \sum_{n=1}^\infty \lambda_n|\langle x,x_n\rangle|^2 = \sum_{n=k}^\infty \lambda_n|\langle x,x_n\rangle|^2 \\ &\le \lambda_k\sum_{n=k}^\infty |\langle x,x_n\rangle|^2 = \lambda_k\|x\|^2 = \lambda_k \quad \text{γιατί } (\lambda_n) \text{ φθίνουσα} \\ \text{άρα}\quad \mu(V_{k-1}) &= \max\{\langle Ax,x\rangle : x\in V_{k-1}^\perp, \|x\|=1\} \le \lambda_k \end{aligned}$$

οπότε το infimum είναι minimum και

$$\min\{\max\{\langle Ax,x\rangle : x\in V^\perp, \|x\|=1\} : \dim V = k-1\} = \lambda_k\,.$$