Γραμμικοί Τελεστές (712)
Ασκήσεις

Στα ακόλουθα, H είναι ένας χώρος Hilbert.

1. **(α)** Αν $a \in \ell^\infty$ και $D_a(e_n) = a(n)e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να βρεθεί το φάσμα $\sigma(D_a)$ του τελεστή $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$.

   (β) Αν $A \in \mathcal{B}(H_1)$ και $B \in \mathcal{B}(H_2)$, να βρεθεί το φάσμα $\sigma(X)$ του τελεστή $X = A \oplus B \in \mathcal{B}(H_1 \oplus H_2)$ (δηλαδή $X = \left[\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right]$) συναρτήσει των φασμάτων $\sigma(A)$ και $\sigma(B)$.

2. **(α)** Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$. Αν V είναι μερική ισομετρία και $TV = VT$, δείξτε ότι ο χώρος $V(H)$ είναι κλειστός και T-αναλλοίωτος.

   (β) Αν P προβολή στον υπόχωρο M του H και T ισομετρία, δείξτε ότι ο τελεστής TPT^* είναι η προβολή στον υπόχωρο $T(M)$.

3. Έστω $E = C([0,1])$ ο υπόχωρος του χώρου Hilbert $L^2([0,1])$. Εξετάστε αν η απεικόνιση $E \to \mathbb{C} : f \to f(0)$ επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική απεικόνιση $L^2([0,1]) \to \mathbb{C}$.

4. Έστω H χώρος Hilbert και $\phi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear μορφή τέτοια ώστε $|\phi(x,y)| \leq 1$ για κάθε $x, y \in H$ νόρμας 1. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A : H \to H$ με $\|A\| \leq 1$ ώστε $\phi(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$. Ποιά επιπλέον συνθήκη για την ϕ ισοδυναμεί με το να είναι ο A αυτοσυζυγής (selfadjoint);

5. Αν $\{a_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$ είναι μιγαδικοί αριθμοί με $\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2 < \infty$, δείξτε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{B}(\ell^2)$ με $\langle Ae_j, e_i\rangle = a_{i,j}$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. [Υπόδειξη: εξετάστε την απεικόνιση ϕ με $\phi(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x(j)\overline{y(i)}$ όπου $x = (x(i)), y = (y(i)) \in \ell^2$.]

6. Έστω $a = (a_n)$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αποδείξτε πλήρως ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής $D_a : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $D_a(e_n) = a_n e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνον αν η (a_n) είναι φραγμένη ακολουθία.

   Αποδείξτε ότι ο D_a είναι προβολή αν και μόνον αν $a_n \in \{0, 1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

   Αποδείξτε ότι αν ο D_a είναι ισομετρία, τότε είναι αυτομάτως επί. Είναι αλήθεια ότι κάθε ισομετρία είναι επί;

7. Αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$ και $F \subseteq H$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος ώστε $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in F$, δείξτε ότι $T = S$.

8. Δείξτε ότι ο $S : \ell^2 \to \ell^2$ με $S : e_n \to e_{n+1}$ δεν έχει ιδιοτιμές. Βρείτε τις ιδιοτιμές του S^*. Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα του S^* είναι τα $\{x_\lambda : 0 < \lambda < 1\}$ όπου $x_\lambda = \sum \lambda^n e_n$ και δείξτε ότι παράγουν τον ℓ^2.

9. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον H, δείξτε ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : H \to H$ ώστε $T : x_n \to x_{2n}$ για κάθε n. Αν η $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική *βάση* του H, αποδείξτε ότι τότε ο T είναι μοναδικός.

10. Πότε ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός; Δείξτε ότι $T \geq 0 \Rightarrow T = T^*$. Δείξτε ότι αν $T_n \geq 0$ για κάθε n και $T_n x \to Tx$ για κάθε x, τότε T θετικός.

11. Έστω $U \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

    (α) Η U είναι ισομετρία

    (β) Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\mathbb{N})$ τότε η $\{Ue_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία.

    Αν ο U ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές, είναι αναγκαστικά φυσιολογικός;

12. Έστω H χώρος Hilbert και $M \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος. Να ορισθεί πλήρως η ορθή προβολή $P_M : H \to H$ επί του M και να αποδειχθεί ότι είναι αυτοσυζυγής τελεστής.

13. Αν P, Q είναι ορθές προβολές σε έναν χώρο Hilbert H, να δειχθεί ότι ο τελεστής $P+Q$ είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν $\|P+Q\| \leq 1$.

14. Έστω $V \in \mathcal{B}(H)$ με $VV^*V = V$. Αν $E := (\ker V)^\perp$, δείξτε ότι ο τελεστής $U = V|_E$ είναι ισομετρία από τον E επί του $F := V(E)$ και ότι ο $U^{-1} : F \to E$ ικανοποιεί $U^{-1} = V^*|_F$.

15. Αν $P_n \in \mathcal{B}(H)$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι κάθετες ανά δύο ορθές προβολές δείξτε ότι για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στον H στο Px, όπου P είναι η προβολή στην κλειστή γραμμική θήκη της $\bigcup_n \mathrm{im}(P_n)$, και $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$.

    Δείξτε επίσης ότι αν $\{a_n\}$ είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $a_n \to 0$, τότε η σειρά $\sum_n a_n P_n$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

    Αν επιπλέον κάθε P_n έχει πεπερασμένη τάξη, τότε η σειρά συγκλίνει σε συμπαγή τελεστή.

16. Έστω $T, T_n \in \mathcal{B}(H)$. Αν κάθε T_n είναι συμπαγής και $\|T_n x - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$, είναι αλήθεια ότι ο T είναι συμπαγής;

17. Έστω $T \in \mathcal{K}(H)$ όπου H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Έστω $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ο.κ. βάση του $\mathrm{im}(T)$, και P_n η ορθή προβολή στον $[y_1, \ldots, y_n]$. Δείξτε ότι $\|P_n Tx - Tx\| \to 0$ για κάθε $x \in H$ και ότι $\|P_n T - T\| \to 0$.

18. (α) Διατυπώστε το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς φυσιολογικούς τελεστές σε χώρο Hilbert.

    (β) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής B ώστε $A = B^3$.

19. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του T, δείξτε ότι ο T είναι φυσιολογικός.

    Ποιά επιπλέον συνθήκη ισοδυναμεί με την
    (α) $T = T^*$;
    (β) T συμπαγής;

20. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$, P ορθή προβολή και $M = \mathrm{im}(P)$, δείξτε ότι $T(M) \subseteq M \iff TP = PTP$. Αν ο T είναι φυσιολογικός, και ο $M = M_\lambda$ είναι ιδιόχωρος του T, δείξτε ότι $TP = PT$.

21. Αν $\xi, \eta \in H$ είναι διανύσματα νόρμας 1 και $T : H \to H$ είναι ο τελεστής $Tx = \langle x, \eta \rangle \xi$ (δηλ. $T = \xi \otimes \eta^*$), να βρείτε τον τελεστή T^*T και να υπολογίσετε τη νόρμα του T. Δείξτε επίσης ότι υπάρχουν: θετικός τελεστής P και μερική ισομετρία V ώστε $T = VP$.

22. Αν $A : H \to H$ συμπαγής τελεστής και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορθοκανονική ακολουθία, δείξτε ότι $\langle Ax_n, x_n \rangle \to 0$ και ότι $\|Ax_n\| \to 0$.

23. Αν $\{a_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, a_1 x_1, a_2 x_2, \dots)$$

όπου $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^2$.

(α) Να βρεθεί ο T^*.

(β) Αν $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχει ο T ιδιοτιμές;

(γ) Ποιά συνθήκη για την $\{a_n\}$ ισοδυναμεί με την συμπάγεια του T;

24. Έστω $Y \in \mathcal{B}(H)$ και $X = Y^* Y$.

(ι) Δείξτε ότι ο X είναι θετικός, και αν επιπλέον $\|Y\| \leq 1$ τότε ο $I - X$ είναι θετικός.

(ιι) Αν $E \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθή προβολή και $X \leq E$, δείξτε ότι $X = EXE$.

25. Δείξτε ότι μια αύξουσα ακολουθία προβολών (Q_n) συγκλίνει *κατά σημείο* στην προβολή Q πάνω στην κλειστή (γραμμική) θήκη της ένωσης των $Q_n(H)$. Συγκλίνει η (Q_n) ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$;

26. Έστω $f \in C([0,1])$. Δώστε προσεκτικά τον ορισμό του πολλαπλασιαστικού τελεστή $M_f : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ και αποδείξτε ότι αν ο M_f είναι προβολή τότε η f είναι σταθερή.

27. Έστω H χώρος Hilbert και $U : H \to H$ γραμμικός τελεστής με $\|U\| \leq 1$. Αν $\xi = (\xi_n)$ είναι ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|\xi\|_1 < \infty$, αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $A : H \to H$ με $\|A\| \leq \|\xi\|_1$ ώστε $\langle Ax, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \langle U^n x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H$.

28. Έστω H χώρος Hilbert και $A, B \in \mathcal{B}(H)$ θετικοί τελεστές. Δείξτε ότι ο τελεστής ABA είναι θετικός. Δώστε παράδειγμα δύο θετικών τελεστών (σε κατάλληλο χώρο Hilbert) ώστε ο AB να μην είναι θετικός.

    Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, $M \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος και P η ορθή προβολή στον M. Δείξτε ότι $T(M) \subseteq M$ αν και μόνον αν $TP = PTP$. Δείξτε επίσης ότι $T(M) \subseteq M$ και $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$ αν και μόνον αν $TP = PT$.

29. (α) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγείς τελεστές, εξηγείστε τι σημαίνει η σχέση $A \leq B$. Δείξτε ότι κάθε ορθή προβολή $P \in \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί $0 \leq P \leq I$.

    (β) Αν $P, Q \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθές προβολές, αποδείξτε ότι ο τελεστής $P + Q$ είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν $P + Q \leq I$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι η τελευταία συνθήκη δεν ικανοποιείται για τυχούσες ορθές προβολές.

30. (α) Είναι αλήθεια ότι κάθε αυτοσυζυγής τελεστής έχει ιδιοτιμές;

    (β) Είναι αλήθεια ότι κάθε συμπαγής τελεστής έχει ιδιοτιμές;

    (γ) Μπορεί ποτέ μια προβολή άπειρης τάξης να είναι συμπαγής τελεστής;