Ο Συναρτησιακός Λογισμός: συμπαγείς τελεστές

Πρόταση *Έστω* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ *η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή* A*, όπου* $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι μια αρίθμηση του* $\sigma_p(A)$ *και* $P_n = P(M_{\lambda_n})$.
Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ *είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε*

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \textit{για κάθε} \;\; x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.
Η απεικόνιση $f \to A_f$ *είναι γραμμική, ισομετρική (δηλ.* $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$*), πολλαπλασιαστική (δηλ.* $A_f A_g = A_{fg}$*) και ικανοποιεί* $A_f^* = A_{f^*}$ *(όπου* $f^*(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$*).*
Τέλος, αν $X \in \mathcal{B}(H)$*, έχουμε*

$$XA = AX \iff XP_n = P_n X \;\; \forall n \iff XA_f = A_f X \;\; \forall f \;\; \textit{φραγμένη στο} \;\; \sigma(A).$$

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται *συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)*. Όταν η f είναι πολυνώνυμο, τότε $A_f = f(A)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για A_f για κάθε f.

Απόδειξη (α) Για κάθε $x \in H$,

$$A^2 x = A\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 P_n x$$

και επαγωγικά $A^m x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^m P_n x$. Λόγω γραμμικότητας, έπεται ότι αν $f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_m \lambda^m$, τότε $A_f = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x = f(A)$.

(β) Για κάθε $x \in H$, επειδή τα διανύσματα $f(\lambda_k)P_k x$ είναι κάθετα ανά δύο, έχουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, για κάθε $m \geq n$,

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} f(\lambda_k) P_k x\right\|^2 = \sum_{k=n}^{m} |f(\lambda_k)|^2 \|P_k x\|^2 \leq \max\{|f(\lambda_k)|^2 : n \leq k \leq m\} \sum_{k=n}^{m} \|P_k x\|^2 .$$

Επειδή $\max\{|f(\lambda_k)| : n \leq k \leq m\} \leq \sup_k |f(\lambda_k)| := \|f\|_\infty$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2$ συγκλίνει (Πρόταση 2.5.12), έπεται από την τελευταία ανισότητα ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_k f(\lambda_k) P_k x$ είναι βασική, άρα συγκλίνει. Ονομάζουμε το άθροισμα της σειράς $A_f x$, δηλαδή θέτουμε $A_f x = \sum_k f(\lambda_k) P_k x$ και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $A_f : x \to A_f x$ είναι γραμμική (κατά σημείο όριο γραμμικών απεικονίσεων). Επίσης, έχουμε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k x\right\|^2 \leq \max\{|f(\lambda_k)|^2 : n \leq k \leq m\}.\|x\|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$$

$$\text{άρα} \qquad \|A_f x\| = \lim_n \left\|\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k x\right\| \leq \|f\|_\infty \|x\|$$

επομένως η απεικόνιση A_f είναι και συνεχής, δηλαδή $A_f \in \mathcal{B}(H)$ και $\|A_f\| \leq \|f\|_\infty$. Εύκολα βλέπουμε ότι εδώ ισχύει ισότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγοντας $x \in P_n(H)$ νόρμας 1 έχουμε $A_f x = A_f P_n x = f(\lambda_n) P_n x$ (αφού $P_m P_n x = 0$ όταν $n \neq m$) άρα

$$|f(\lambda_n)| = \|f(\lambda_n) P_n x\| = \|A_f P_n x\| \leq \|A_f\| \|P_n x\| = \|A_f\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\sup_n |f(\lambda_n)| \leq \|A_f\|$, άρα $\|A_f\| = \|f\|_\infty$.

Εξετάζουμε τώρα την απεικόνιση $f \to A_f$. Είναι φανερό ότι πρόκειται για γραμμική απεικόνιση: $A_{f+\lambda g} = A_f + \lambda A_g$. Επίσης ισχύει ότι $A_{gf} = A_g A_f$ γιατί, για κάθε $x \in H$

$$A_g A_f x = A_g \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) A_g P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) g(\lambda_n) P_n x = A_{gf} x.$$

εφόσον $A_g P_n x = g(\lambda_n) P_n x$.

Επίσης, για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle A_f^* x, y \rangle = \langle x, A_f y \rangle = \langle x, \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n y \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle x, P_n y \rangle \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle P_n x, y \rangle = \langle \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} P_n x, y \rangle &= \langle A_{\bar{f}} x, y \rangle\end{aligned}$$

δηλαδή $A_f^* = A_{\bar{f}} = A_{f^*}$.

Έπεται ειδικότερα ότι $A_f^* A_f = A_{f^*} A_f = A_{f^* f} = A_{f f^*} = A_f A_{f^*}$, δηλαδή ο A_f είναι φυσιολογικός.

(γ) Έστω $X \in \mathcal{B}(H)$. Θα δείξουμε ότι

$$XA = AX \iff XP_n = P_n X \ \forall n \in \mathbb{N} \iff XA_f = A_f X \quad \forall f \text{ φραγμένη στο } \sigma(A).$$

Έστω ότι ο X μετατίθεται με τον A και έστω λ_n μια ιδιοτιμή του A. Ξέρουμε ότι ο X αφήνει τον ιδιόχωρο M_{λ_n} του A αναλλοίωτο. Αφήνει επίσης αναλλοίωτους και όλους τους άλλους ιδιόχωρους M_{λ_m} όπου $\lambda_m \neq \lambda_n$, συνεπώς αφήνει αναλλοίωτο και το ευθύ τους άθροισμα. Όμως αυτό το ευθύ άθροισμα είναι ο $M_{\lambda_n}^{\perp}$ (γιατί το ευθύ άθροισμα όλων των ιδιοχώρων είναι ο H). Κατά συνέπεια ο X ανάγει τον M_{λ_n}, άρα μετατίθεται με την προβολή P_n. Δηλαδή ο X μετατίθεται με κάθε P_n, $n \in \mathbb{N}$.

Αν ο X μετατίθεται με κάθε P_n, $n \in \mathbb{N}$, τότε μετατίθεται και με κάθε A_f. Πράγματι, για κάθε $x \in H$,

$$XA_f x = X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) X P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n X x = A_f X x,$$

και άρα $XA_f = A_f X$.

Τέλος, αν ο X μετατίθεται με κάθε A_f, τότε φυσικά μετατίθεται και με τον A_{id} (όπου id η ταυτοτική συνάρτηση $\text{id}(\lambda) = \lambda$) δηλαδή με τον A.

Έτσι, δείξαμε ότι

$$XA = AX \Rightarrow XP_n = P_n X \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow XA_f = A_f X \quad \forall f \text{ φραγμένη στο } \sigma(A) \Rightarrow XA = AX.$$

$\square$