

## Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)<sup>1</sup>

**Θεώρημα 1** Αν  $K$  είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο<sup>2</sup> Hilbert  $H$ , ή η εξίσωση

$$x - Kx = y \quad (1)$$

έχει μοναδική λύση  $x \in H$  για κάθε  $y \in H$ , ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι η (1) έχει, για  $y = 0$ , το πολύ μια λύση (οπότε αποκλείεται το δεύτερο ενδεχόμενο), τότε από την συμπάγεια του τελεστή  $K$  συμπεραίνουμε την ύπαρξη λύσης της (1) για κάθε  $y \in H$ , και μάλιστα ακριβώς μιας.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι βέβαια γνωστό όταν  $\dim H < +\infty$ . Το γεγονός ότι ισχύει σε απειροδιάστατους χώρους είναι μία από τις βασικές αιτίες που οδήγησε στην μελέτη των συμπαγών τελεστών.

Για την απόδειξη, θα χρειασθούμε δύο Λήμματα:

**Λήμμα 2** Αν  $T \in \mathcal{B}(H)$  και  $\|T\| < 1$ , ο  $I - T$  είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το  $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

**Απόδειξη** Αν θέσουμε

$$S_m = \sum_{n=0}^m T^n$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή  $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \rightarrow 0$ ,

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \quad (2)$$

Όμως η ακολουθία  $\{S_m\}$  συγκλίνει. Πράγματι, αν  $m > n$ ,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Επειδή  $\|T\| < 1$ , έπεται ότι η  $\{S_m\}$  είναι βασική ακολουθία στην τοπολογία της νόρμας του  $\mathcal{B}(H)$ , επομένως συγκλίνει σε έναν  $S \in \mathcal{B}(H)$ . Από την (2) έχουμε ότι  $(I - T)S = S(I - T) = I$ , άρα  $S = (I - T)^{-1}$ .  $\square$

**Λήμμα 3** Έστω  $K \in \mathcal{B}(H)$  συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής  $I - K$  έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι  $I - I$ .

<sup>1</sup>fredunn, 20/12/2017, compiled 24 Δεκεμβρίου 2017

<sup>2</sup>Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

**Απόδειξη** Υποθέτουμε ότι ο  $I - K$  είναι 1-1. Υπάρχει ένας τελεστής  $F \in \mathcal{B}(H)$  πεπερασμένης τάξης ώστε  $\|K - F\| < 1$ . Αν  $K_1 = K - F \in \mathcal{K}(H)$ , τότε από το Λήμμα 2 ο τελεστής  $I - K_1$  είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε  $G = F(I - K_1)^{-1}$ .

Παρατηρούμε ότι ο  $I - G$  είναι 1-1.

Πράγματι, αυτό είναι φανερό, αν παρατηρήσει κανείς ότι <sup>3</sup>

$$I - K = (I - G)(I - K_1) \quad \text{ισοδύναμα} \quad I - G = (I - K)(I - K_1)^{-1}.$$

Όμως ο χώρος  $H_o := \text{im } G = \text{im } F$  έχει πεπερασμένη διάσταση. Θέτουμε  $T = (I - G)|_{H_o}$ . Ο  $T$  απεικονίζει τον  $H_o$  στον  $H_o$  (διότι αν  $x \in H_o$  τότε  $Tx = x - Gx \in H_o$ ) και είναι 1-1. Επομένως, αφού  $\dim H_o < \infty$ , ο  $T$  απεικονίζει τον  $H_o$  επί του  $H_o$ . Δηλαδή, για κάθε  $v \in H_o$  υπάρχει μοναδικό  $u \in H_o$  ώστε  $u - Gu = v$ .

Επεται τώρα ότι  $(I - G)(H) = H$ .

Πράγματι, για κάθε  $y \in H$ , εφόσον  $Gy \in H_o$ , υπάρχει μοναδικό  $u \in H_o$  ώστε  $u - Gu = Gy$ . Θέτοντας τώρα  $x = y + u$  έχουμε

$$(I - G)x = (y - Gy) + (u - Gu) = (y - Gy) + Gy = y.$$

Από τη σχέση  $I - K = (I - G)(I - K_1)$  προκύπτει τώρα ότι και ο  $I - K$  είναι επί του  $H$ .

Κατά συνέπεια, ορίζεται καλά η γραμμική απεικόνιση

$$Y = (I - K)^{-1} : H \rightarrow H$$

και μένει να δειχθεί ότι είναι φραγμένη. <sup>4</sup>

Έστω ότι δεν είναι. Υπάρχει τότε στον  $H$  μια ακολουθία  $(x_n)$  από μοναδιαία διανύσματα ώστε  $\|Yx_n\| \geq n$  για κάθε  $n$ .

Θέτουμε  $y_n = \frac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$ . Αφού ο  $K$  είναι συμπαγής και η  $(y_n)$  είναι φραγμένη, θα υπάρχει μια υπακολουθία  $(y_{k_n})$  ώστε η  $(Ky_{k_n})$  να συγκλίνει, έστω στο  $z$ . Όμως

$$\|(I - K)y_{k_n}\| = \left\| (I - K) \frac{Yx_{k_n}}{\|Yx_{k_n}\|} \right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Yx_{k_n}\|} \leq \frac{1}{k_n}$$

άρα  $(I - K)y_{k_n} \rightarrow 0$ . Εφόσον  $Ky_{k_n} \rightarrow z$ , έχουμε  $y_{k_n} \rightarrow z$  (άρα  $\|z\| = 1$ ). Από τη συνέχεια του  $K$  έπεται τώρα ότι  $Ky_{k_n} \rightarrow Kz$ , επομένως  $Kz = z$  από τη μοναδικότητα του ορίου, δηλ.  $(I - K)z = 0$ . Αυτό είναι άτοπο, αφού ο  $(I - K)$  είναι 1-1.  $\square$

### Απόδειξη του Εναλλακτικού Θεωρήματος Fredholm.

Έστω ότι η ομογενής εξίσωση  $x - Kx = 0$  έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Δηλαδή, ισοδύναμα, έστω ότι ο πυρήνας  $M_1 = \ker(I - K)$  δεν είναι τετριμμένος. Τότε είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι ο  $K$  περιορισμένος στον  $M_1$  είναι ο ταυτοτικός τελεστής, και είναι συμπαγής.

Έστω τώρα ότι η ομογενής εξίσωση  $x - Kx = 0$  έχει μόνον τη μηδενική λύση. Δηλαδή, ο  $I - K$  είναι 1-1. Τότε από το Λήμμα 3 ο  $I - K$  είναι αντιστρέψιμος, οπότε για κάθε  $y \in H$  η εξίσωση  $x - Kx = y$  έχει την μοναδική λύση  $x = (I - K)^{-1}y$ .  $\square$

Η επόμενη Πρόταση συμπληρώνει το Θεώρημα:

<sup>3</sup> $(I - G)(I - K_1) = (I - K_1) - G(I - K_1) = I - K_1 - F = I - K$

<sup>4</sup>Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε όμως μια ανεξάρτητη και στοιχειώδη απόδειξη.

**Ορισμός 1 Φάσμα** (*spectrum*) ενός φραγμένου τελεστή  $T \in \mathcal{B}(H)$  ονομάζεται το σύνολο

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο τελεστής } \lambda I - T \text{ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο}\}.$$

Βεβαίως οι ιδιοτιμές του  $T$  ανήκουν στο φάσμα του, όμως δεν το εξαντλούν.<sup>5</sup> Για παράδειγμα, ο τελεστής  $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$  με  $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$  δεν έχει ιδιοτιμές, αλλά  $0 \in \sigma(T)$  (ο  $T$  δεν είναι αντιστρέψιμος).

Η επόμενη Πρόταση έχει αποδειχθεί για την ειδική περίπτωση φυσιολογικού τελεστή, χρησιμοποιώντας ότι οι ιδιόχωροι ενός τέτοιου τελεστή είναι κάθετοι ανά δύο. Δείχνουμε ότι ο περιορισμός αυτός δεν είναι αναγκαίος.

**Πρόταση 4** Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert και  $A \in \mathcal{K}(H)$  το σύνολο  $\sigma(A) \setminus \{0\}$  αποτελείται μόνον από ιδιοτιμές του  $A$  και, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία.

**Απόδειξη** Αν το  $\lambda \neq 0$  δεν είναι ιδιοτιμή του  $A$ , τότε ο τελεστής  $\lambda I - A$  είναι 1-1, άρα το ίδιο ισχύει και για τον  $I - \frac{A}{\lambda}$ . Επειδή ο  $\frac{A}{\lambda}$  είναι συμπαγής, έπεται από το Λήμμα 3 ότι ο  $I - \frac{A}{\lambda}$  είναι αντιστρέψιμος, οπότε και ο  $\lambda I - A$  είναι αντιστρέψιμος.

Μένει ναδειχθεί ότι το σύνολο των ιδιοτιμών του  $A$ , αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία. Από την επόμενη Πρόταση όμως προκύπτει ότι, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , το σύνολο

$$\left\{ \lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| > \frac{1}{n} \right\}$$

είναι πεπερασμένο. Άρα το  $\sigma_p(A)$  είναι αριθμήσιμο και έχει μόνο πιθανό σημείο συσσώρευσης το 0.  $\square$

**Πρόταση 5** Αν  $H$  είναι χώρος Hilbert,  $A \in \mathcal{K}(H)$  και  $\epsilon > 0$ , δεν υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του  $A$  που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές  $\lambda$  του  $A$  με  $|\lambda| \geq \epsilon$ .

**Απόδειξη** Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει  $\epsilon > 0$  και μια άπειρη ακολουθία  $\{x_n\}$  από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τέτοια ώστε  $Ax_n = \lambda_n x_n$  όπου  $|\lambda_n| \geq \epsilon$  (δεν υποθέτουμε ότι οι  $\lambda_n$  είναι διαφορετικές ανά δύο).

Θέτουμε τότε  $N_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

**Ισχυρισμός** Για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , ισχύει  $A(N_n) \subseteq N_n$  και  $(A - \lambda_n I)(N_n) \subseteq N_{n-1}$ .

**Απόδειξη** Έστω  $y \in N_n$ , γράφουμε  $y = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$  όπου  $\mu_k \in \mathbb{C}$ . Έχουμε

$$Ay = \sum_{k=1}^n \mu_k \lambda_k x_k \in N_n$$

$$\text{και } (A - \lambda_n I)y = \sum_{k=1}^n \mu_k (\lambda_k - \lambda_n) x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mu_k (\lambda_k - \lambda_n) x_k + 0x_n \in N_{n-1}.$$

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Επειδή ο  $N_{n-1}$  είναι γνήσιος υπόχωρος του  $N_n$  (αφού  $x_n \notin [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ ) υπάρχει  $y_n \in N_n$  με  $\|y_n\| = 1$  ώστε  $y_n \perp N_{n-1}$ .

<sup>5</sup>Ενώ (σε απειροδιάστατους χώρους) το σύνολο των ιδιοτιμών ενός τελεστή μπορεί να είναι κενό, αποδεικνύεται ότι το φάσμα οποιουδήποτε φραγμένου τελεστή σε χώρο Banach είναι μη κενό.

Τότε, για κάθε  $n, m \in \mathbb{N}$  με  $n > m$  έχουμε  $Ay_m \in N_m \subseteq N_{n-1}$  και  $(A - \lambda_n I)y_n \in N_{n-1}$ , άρα  $(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m \in N_{n-1}$  οπότε, αφού  $\lambda_n y_n \perp N_{n-1}$ , έχουμε από το Πυθαγόρειο θεώρημα  $\|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m + \lambda_n y_n\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m\|^2 + \|\lambda_n y_n\|^2$  και συνεπώς

$$\|Ay_n - Ay_m\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m + \lambda_n y_n\|^2 = \|(A - \lambda_n I)y_n - Ay_m\|^2 + \|\lambda_n y_n\|^2 \geq |\lambda_n|^2 > \epsilon^2.$$

Επομένως, η ακολουθία  $\{Ay_n\}$  δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, ενώ η  $\{y_n\}$  είναι φραγμένη. Αφού ο  $A$  είναι συμπαγής, έχουμε καταλήξει σε άτοπο.  $\square$