Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

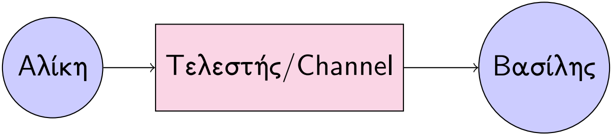
http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Χειμερινό Εξάμηνο 2017-18

Περιεχόμενα

Τελεστές

Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ;



Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ;

Παράδειγμα 1. $T: f \to a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ a_i «καλές» συναρτήσεις).
Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$.
Ορίζεται η $T(f)$ όταν η f δεν παραγωγίζεται;
Μήπως αρκεί να παραγωγίζεται με την «ασθενή έννοια»;
Έστω f, g ∞-παραγωγίσιμες, με συμπαγή φορέα. Τότε $\int_{-\infty}^{+\infty} fg' = [fg]_{-\infty}^{+\infty} - \int f'g = -\int f'g$, οπότε $\int f'g = -\int fg'$.
Οπότε ορίζω ασθενή παράγωγο της f μια $h = h_f$ που ικανοποιεί $\int hg = -\int f g'$ *για κάθε* g ∞-παραγωγίσιμη.
Τώρα ο T μπορεί να ορισθεί σε «μεγαλύτερο» χώρο.

Παράδειγμα 2. $T: \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \to [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (x_i \in \mathbb{C}, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C}))$

Τελεστές

Παράδειγμα 3. $T : f \to (Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$: ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π-περιοδική)

Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω $Tf_n = \hat{g}(n)f_n$ ($n \in \mathbb{Z}$),

δηλαδή $T : \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$

Ο T διαγωνοποιήθηκε! ... Ως προς την $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Γιατί; Γιατί είναι ορθοκανονικά. Άρα είναι βάση του χώρου που παράγουν. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός

Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ ώστε

(I) Αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall\, x, y, z \in X$,

- (i) $x + y = y + x$.
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.
- (iii) $\exists\, \vec{0} \in X$ *ώστε* $\forall\, x \in X$, $\vec{0} + x = x$.
- (iv) $\forall x \in X\ \exists\, (-x) \in X$ *ώστε* $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) Αξιώματα του πολλαπλασιασμού: $\forall\, x, y \in X$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

- (i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
- (ii) $1x = x$.
- (iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
- (iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

• Το $\mathbb{C}$.

• Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n-αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \ldots, x(n))$$

με πράξεις κατά συνεταταγμένη. Γράφουμε καμμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \ldots, x(n)]^T .$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose).

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συνεταταγμένη.
Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00}: κάθε $x = x(n)) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.
Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00}.

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ τω οποίων ο φορέας $\operatorname{supp} x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \ldots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

• Το σύνολο $\mathscr{S}$ όλων των ακολουθιών πραγμ. ή μιγ. αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένη:

$$x+y=(\xi(k)+\eta(k)) \quad , \quad \lambda x=(\lambda\xi(k))$$

για $x=(\xi(k))$, $y=(\eta(k))$ και $\lambda\in\mathbb{K}$.

• Αν $A\neq\emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f:A\to\mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο:
αν $f,g\in\mathbb{K}^A$ και $\lambda\in\mathbb{K}$, ορίζουμε $f+g,\ \lambda f\in\mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t)=\lambda f(t) \quad , \quad t\in A.$$

(Πρτρ: $\mathscr{S}=\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

• Ο χώρος $\mathscr{R}[0,1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{C}$.
Κάθε συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f=u+iv$ όπου $u(t):=\frac{1}{2}(f(t)+\overline{f(t)})$, $v(t):=\frac{1}{2i}(f(t)-\overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i\int v(t)dt,$$

Ο $\mathscr{R}[0,1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

• Ο χώρος $\ell^2=\ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μιγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n |x(n)|^2<\infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Παρατήρηση - Άσκηση Κάθε γραμμικός χώρος «είναι» ένας χώρος συναρτήσεων σε κάποιο σύνολο.

Γραμμικοί χώροι

Αν X γραμμικός χώρος και $x \in X$, $A \subseteq X$, λέμε ότι το x ανήκει στην γραμμική θήκη του A (γράφουμε $x \in \mathrm{span}(A)$) ή ότι είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A, αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1, \ldots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \ldots. \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα $y_1, \ldots, y_m$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \ldots \mu_m \in \mathbb{K}$, όχι όλα 0, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \ldots \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k, δηλ. αν

$$\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_m y_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό $M \subseteq X$ λέγεται γραμμικά εξαρτημένο αν περιέχει κάποια $y_1, \ldots, y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \setminus \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \setminus \{x\}$.

Το M είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε πεπερ. πλήθος στοιχείων $x_1, \ldots, x_n$ του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0.$$

Ένας $Y \subseteq X$ λέγεται (γραμμικός) υπόχωρος του X αν $\mathrm{span}(Y) \subseteq Y$, δηλαδή αν

$$x, y \in Y \text{ και } \lambda \in \mathbb{K} \Longrightarrow x + \lambda y \in Y.$$

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι. Μια απεικόνιση $T : E \mapsto F$ λέγεται γραμμική αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \; T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται (γραμμικός) ισομορφισμός αν επι πλέον είναι 1-1 και επί.
Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \mapsto F$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$*-γραμμικός χώρος* ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$)*. Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον* E *είναι μια απεικόνιση*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &(i) && \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ &(ii) && \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ &(iii) && \langle x, x \rangle \geq 0 \\ &(iv) && \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ *και* $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \ \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle .$

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(α) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

(β) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Άσκηση Δείξτε την Cauchy-Schwarz (α) για ημι-εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E, δηλαδή ικανοποιεί, για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (i) &\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ (ii) &\quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ (iii) &\quad \|x\| = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πόρισμα

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$$(E, \|.\|) \times (E, \|.\|) \to (\mathbb{K}, |.|) : (x, y) \to \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0,\ \text{ τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός

*Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y\rangle = 0$.*
*Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.*

ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle ., .\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει[1] $[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά $\quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

---

[1] με $[A]$ ή $\operatorname{span} A$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ πεπερασμένη ορθοκανονική ακολουθία στον E. (α) Το διάνυσμα $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το (μοναδικό) πλησιέστερο στο x στοιχείο του υποχώρου $F = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.
(β) Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $(\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Απόδειξη Λήμματος (β) Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.
Τώρα: $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k \rangle = 0 \; \forall k, \iff$
$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \; \forall k, \iff y = y_x$.

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = z + y_1$$

παρατηρούμε ότι $z \perp F$ (γιατί $\langle z, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \ldots n$) και $y_1 \in F$, άρα $y_1 \perp z$. Πυθαγόρειο: $\|z + y_1\|^2 = \|z\|^2 + \|y_1\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(ι) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
(ιι) Στην (ι) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle ., . \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.
Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|.\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφ' όσον δεν είναι πλήρης.
(c) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|.\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (II))

Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x-y\| = d(x,E) \equiv \inf\{\|x-z\| : z \in E\}$.

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του E ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον E, και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.

Από την απόδειξη του Θεωρήματος:

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, F κυρτό [2] και πλήρες υποσύνολο του E. Αν $x \in E \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε
$\|x-y\| = d(x,F) \equiv \inf\{\|x-z\| : z \in F\}$.

---

[2] δηλ. αν $x, y \in F$, για κάθε $\lambda \in [0,1]$ να ισχύει $(1-\lambda)x + \lambda y \in F$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert,* E *κλειστός γραμμικός υπόχωρος του* H*.*
Αν $x \in H \setminus E$*, τότε το διάνυσμα* $x - P_E(x)$ *είναι κάθετο στον* E*.*
Αντίστροφα αν $y_0 \in E$ *και* $(x - y_0) \perp E$ *τότε* $y_0 = P_E(x)$*.*

Πόρισμα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H *είναι χώρος Hilbert και* M *είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του* H *τότε υπάρχει* $z \in H, z \neq 0$ *ώστε* $z \perp M$*. Η απόσταση του* z *από τον* M *είναι η μεγαλύτερη δυνατή :* $d(z, M) = \|z\|$*.*

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα

Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert *H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.*

Ορισμός (κάθετος υπόχωρος)

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Παρατηρήσεις (α) Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Όταν ο E είναι χώρος Hilbert: $A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{span}(A)$ πυκνός στον E.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H : y \to P_M(y)$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M, ώστε $M^{\perp} = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις: Μια άλλη προσέγγιση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5. $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6. Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.
7. Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle .$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \to \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλ.

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε} \quad y \in H.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$.
Το X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\mathrm{span}(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός

*Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική βάση** του E αν*
(i) είναι ορθοκανονική και
(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι συνήθως αλγεβρική βάση (π.χ. στον ℓ^2).

Παρατήρηση

Έστω $\mathscr{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H. Η $\mathscr{C}$ είναι βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathscr{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathscr{C}$ είναι το 0.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος[3] *χώρος E με εσωτερικό γινόμενο περιέχει μια ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).*

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F (π.χ. $E = C([0,1])$ και $F =$ πολυώνυμα).

Άσκηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E.

Τότε $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ αν και μόνον αν $x \in \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \mathrm{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

[3] Το ευθύ ισχύει και σε μη διαχωρίσιμους

Μισή Απόδειξη Έστω $x \in \overline{K}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως, πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

Αλλά ξέρουμε (Πυθαγόρειο)

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2. \quad \rightsquigarrow$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $\quad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Συνέπεια:

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο* E *με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε* $x \in E$,

(ι) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του* E*).*

(ιι) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$. *(Ισότητα Parseval)*

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο* E, *για κάθε* $x, y \in E$ *έχουμε*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, e_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.
(Άρα, ο E έχει μια πλήρωση που είναι χώρος Hilbert.)

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος [4] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H, η απεικόνιση

$$U : H \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \ell^2 \; : \; x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

[4] Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για μη διαχωρίσιμους χώρους.

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E,\langle .,.\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H,\langle .,.\rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \to H$ με πυκνή εικόνα. Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K,\langle .,.\rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\psi : E \to K$ γραμμική ισομετρία *με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H* επί *του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$.*

Ο χώρος Hilbert $(H,\langle .,.\rangle)$ λέγεται **η πλήρωση** του $(E,\langle .,.\rangle)$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, two heads, "\phi"] \arrow[d, tail, two heads, "id"] & \phi(E) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads, dashed] & H = \overline{\phi(E)} \arrow[d, tail, two heads, "T"] \\
E \arrow[r, tail, two heads, "\psi"'] & \psi(E) \arrow[r, tail] & K = \overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}$$

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ όπου
$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$.
Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$. Θέτω $\langle f, g\rangle = \int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt$.
Ονομάζω $L^2(R)$ την πλήρωση του F.

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι ορισμοί των χώρων Hilbert $L^2([a,b])$ και $L^2(\mathbb{R})$.

Ενημερωτικά παρατίθενται στις επόμενες δυο διαφάνειες οι ορισμοί από τη Θεωρία Μέτρου.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathscr{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $([a,b], \mathscr{B}, \lambda)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathscr{L}^2(X, \mathscr{S}, \mu) = \mathscr{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$. Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathscr{N} = \{f \in \mathscr{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathscr{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σ.π. $\iff$ $f - g \in \mathscr{N}$.
Επίσης, ο $\mathscr{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{L}^2$.
Θέτω $\|f + \mathscr{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^2(\mu) := \mathscr{L}^2(\mu)/\mathscr{N}$.
Έπεται ότι ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathscr{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ-σ.π.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f+\mathscr{N}, g+\mathscr{N}\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Luzin) Ο $C([a,b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a,b],\mathscr{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R},\mathscr{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινομενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_i : i \in I\}$. (Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(I)$)

Φραγμένοι τελεστές

Υπενθύμιση: E, F γραμμικοί χώροι, $T : E \to F$ γραμμική:
$T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) \ \ \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$.
Παραδείγματα;

Θεώρημα

Αν $(E, \|.\|_E)$ και $(F, \|.\|_F)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) *Η T είναι συνεχής.*

(β) *Η T είναι συνεχής στο $0 \in E$.*

(γ) *Η T είναι συνεχής σε κάποιο σημείο του E.*

(δ) *Υπάρχει $M < \infty$ ώστε $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ για κάθε $x \in E$.*

(ε) *Ο περιορισμός της T στην μοναδιαία μπάλα του E είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\}$ είναι φραγμένο.*

(στ) *Η T είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Φραγμένοι τελεστές

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ΄ την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία γραμμική *απεικόνιση* $T : (E, \|.\|_E) \to (F, \|.\|_F)$ *λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν η* T *απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του* E *σε φραγμένα υποσύνολα του* F. *Ισοδύναμα, αν ο περιορισμός της* T *στην μοναδιαία μπάλα του* E *είναι φραγμένη συνάρτηση.*

Αν $T : E \to F$ είναι γραμμική απεικόνιση, θέτουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Η T είναι φραγμένη αν και μόνον αν $\|T\| < +\infty$.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\}.$$

Πρόταση

Αν $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ *είναι χώροι με νόρμα και* $T : E \to F$ *φραγμένος τελεστής, τότε*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0\right\}$$

$$= \inf\{k > 0 : \|Tx\|_F \leq k\|x\|_E \text{ για κάθε } x \in E\}.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\|Tx\|_F \leq \|T\|.\|x\|_E$$

για κάθε $x \in E$.

Φραγμένοι τελεστές

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
D *πυκνός υπόχωρος του* E *και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Η T *δέχεται συνεχή επέκταση*

$$T_1 : E \to F \quad \delta\eta\lambda. \;\; T_1|_D = T$$

αν και μόνον αν είναι συνεχής.

Η επέκταση T_1 *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|T_1\| = \|T\|$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από την σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 ανν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).

• Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k).$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$ Αν $k \in C([a,b]\times[a,b])$, ορίζουμε

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $K : (C([a,b]), \|\cdot\|_2) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|K\|^2 \le \iint |K(x,y)|^2 dxdy$. Άρα επεκτείνεται σε $K : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$.

- Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$ Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα). (Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots)$$

Ορίζω U:

$$Ux = (\ldots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \ldots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικός, ισομετρία και επί.
Ορίζω U^*:

$$x = (\ldots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \ldots)$$
$$U^*x = (\ldots, x(0), x(1), x(2), x(3), \ldots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και} \;\; U^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$\begin{aligned} Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+) \\ \text{και} \;\; S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$).
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα [5] ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C_c^\infty(\mathbb{R})$ του $L^2(\mathbb{R})$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2(\mathbb{R})$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M\|f\|_2$ για κάθε $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

[5] π.χ. $f(x) = \exp(\frac{-1}{1-x^2})$ όταν $|x| \leq 1$ και $f(x) = 0$ όταν $|x| > 1$

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|.\|), (F, \|.\|)$ *είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε* $\mathscr{B}(E,F)$ *το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων*

$$T : (E, \|.\|) \to (F, \|.\|).$$

Όταν $E = F$, *γράφουμε* $\mathscr{B}(E)$ *αντί για* $\mathscr{B}(E,E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathscr{B}(E,F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ *είναι νόρμα στον χώρο* $\mathscr{B}(E,F)$.
Αν επί πλέον ο F *είναι πλήρης, ο* $\mathscr{B}(E,F)$ *είναι χώρος Banach.*

Όταν $E = F$, ο $\mathscr{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$.
Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$.

Ο συζυγής τελεστής

Να δείξουμε

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Παραδείγματα (α) Αν $H_1 = H_2 = \ell^2(n)$ και ο T έχει πίνακα $[a_{ij}]$, ο T^* είναι ο τελετής που έχει πίνακα $[b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$.
(β) Αν $H_1 = H_2 = \ell^2$ και $a \in \ell^\infty$, ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).
(γ) Αν $H_1 = H_2 = L^2([0,1])$ και $f \in C([0,1])$, ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες*
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ *η απεικόνιση* $x \to \phi(x,y) : H_1 \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική.*
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ *η απεικόνιση* $y \to \overline{\phi(x,y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ *είναι γραμμική.*
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x,y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty.$

Παράδειγμα $\phi(x,y) = \langle Tx, y \rangle$ όπου $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$.
Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\phi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\tilde{\phi}(x) = \phi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\phi(x,y) = \tilde{\phi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \tilde{\phi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\tilde{\phi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\tilde{\phi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή ϕ είναι φραγμένη ανν η $\hat{\phi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H. Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\phi}(x)| : x \in B_H\} \leq \|\phi\| \leq 2\sup\{|\hat{\phi}(x)| : x \in B_H\}.$$

Αν $\phi(x,x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ισχύει ισότητα.

... αλλά όχι εν γένει.

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathscr{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\}.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x,y) = \langle Tx, y\rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^* y\rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y,x) := \langle y, Tx\rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.

Ο συζυγής τελεστής

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathscr{B}(H_1, H_2) \to \mathscr{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),
η $T \to T^* : \mathscr{B}(H) \to \mathscr{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$. (σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα: Ο shift S δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής ανν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathscr{B}_h(H) = \{T \in \mathscr{B}(H), T = T^*\}$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε
(i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.
(ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

Παραδείγματα

Αν $H_1 = H_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).
Ο τελεστής $M : H^2 \to H^2$ όπου $(Mf)(z) = zf(z)$, $f \in H^2$ είναι ισομετρία, όχι επί (άσκηση).

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathscr{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_i = A_i^* \ (i = 1, 2).$$

Ορισμός

*(i) Ένας τελεστής $T \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται **θετικός** (positive) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.*
Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathscr{B}_+(H)$.
(ii) Αν $T, S \in \mathscr{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathscr{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: $\mathscr{B}_+(H) \subseteq \mathscr{B}_h(H)$.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathscr{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathscr{B}_+(H) \subseteq \mathscr{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathscr{B}_h(H)$ (full cone):$\forall T \in \mathscr{B}_h \ \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.

- $\|\cdot\|$-κλειστός.

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathscr{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathscr{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathscr{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Αν $A = A^*$ τότε $\quad -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$

$$\text{άρα} \quad A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad (\text{διαφορά δυο θετικών})$$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathscr{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathscr{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$. Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$.

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες τελεστών.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathscr{B}(H)$ *υπάρχει* ***μοναδικός θετικός*** *τελεστής* $X \in \mathscr{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$. *Ο τελεστής αυτός λέγεται* ***τετραγωνική ρίζα*** *του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ *μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον* A.

Πόρισμα

Αν $A, B \in \mathscr{B}(H)$ *είναι θετικοί τελεστές, τότε ο* AB *είναι θετικός αν και μόνον αν* $AB = BA$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathscr{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^{\perp}$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V.

(Δες και το αρχείο `merisom.pdf`.)

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \to Tx$ και να επεκτείνεις...

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp} : \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$.

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Προβολές

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathscr{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\mathrm{im}\, P$.*

(δ) *Ο P είναι θετικός.*

(ε) *Ο P είναι αυτοσυζυγής.*

(ζ) *Ο P είναι φυσιολογικός.*

*Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή
αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.*

(Αποδείξεις των δυο προτάσεων υπάρχουν στο αρχείο `probnewn.pdf`.)

Προβολές

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

(α) Αν $P \in \mathscr{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.

(β) Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και
$x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$.

(γ) Αν P ορθή προβολή, τότε $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$ και
$Py = y \iff \|Py\| = \|y\|$.

Προβολές

Πρόταση (Η απεικόνιση $P \to \operatorname{im} P$ διατηρεί τη διάταξη)

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) $P \leq Q$ *(β)* $\|Px\| \leq \|Qx\|$ *για κάθε* $x \in H$
(γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ *(δ)* $QP = P$ *(ε)* $PQ = P$.

Πρόταση

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε
(i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$. Τότε $R = P(M \cap N)$.
(i') Ειδικότερα,

$$M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0.$$

(ii) Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \perp N$. Τότε $S = P(M + N)$.
(iii) Ο τελεστής $D = P - Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \supseteq N$. Τότε $D = P(M \cap N^{\perp})$.

Προβολές

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N.
Ο $\overline{M+N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N.

Συμβολισμοί:
$$\begin{aligned} P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M+N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Πρτρ: Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.
(α) Αν M, N κλειστοί υπόχωροι και $\dim N < \infty$, τότε $M + N$ κλειστός. (ασκ.)
(β) Αν $M \perp N$, τότε $M + N$ κλειστός (γνωστό: από το Πυθαγόρειο...).
(γ) Αν $M = \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, τότε (M, N κλειστοί αλλά) $M + N$ όχι κλειστός. (ασκ.)

Προβολές

Πρόταση

Αν (Q_i) είναι αύξουσα ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο [6] *στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\mathrm{im}\, Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$.*

(Ανάλογο αποτέλεσμα για φθίνουσες.)

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H.

(i) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$, και $\sum_n P_n x = P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\mathrm{im}\, P_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Για κάθε $x \in H$ ισχύει $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

(ii) Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$, τότε οι P_n είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i).

---

[6] όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \mathrm{im}\, T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\mathrm{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathscr{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathscr{F}(E, F) = \{T \in \mathscr{B}(E, F) : \mathrm{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathscr{F}(E) = \mathscr{F}(E, E)$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $x \in K$ και $y \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$x \otimes y^* : H \to K$$

$$\text{από τον τύπο} \quad (x \otimes y^*)(z) = \langle z, y \rangle x \quad (z \in H).$$

Άλλοι συμβολισμοί: $x \otimes y^* = xy^* = \theta_{x,y} = |x\rangle\langle y|$.
Ο τελεστής $x \otimes y^*$ είναι φραγμένος, και $\|x \otimes y^*\| = \|x\|.\|y\|$.
Κάθε $T \in \mathscr{F}(H, K)$ πρώτης τάξης $(\mathrm{rank}(T) = 1)$ είναι αυτής της μορφής (με x, y μη μηδενικά).

Κάθε $A \in \mathscr{F}(H, K)$ γράφεται $A = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k^*$
και ισχύει $A^* = \sum_{k=1}^{n} y_k \otimes x_k^*$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Κάθε $T \in \mathscr{F}(H,K)$ «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των $(\ker T)^{\perp} = \mathrm{im}\, T^*$ και $T(E) = \mathrm{im}\, T$):
Ως προς τις διασπάσεις $H = (\ker T)^{\perp} \oplus \ker T$ και $K = \mathrm{im}\, T \oplus (\mathrm{im}\, T)^{\perp}$ ο T γράφεται

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τοπολογική ιδιότητα: Αν $A \in \mathscr{F}(H,K)$, τότε το $A(B_H)$ είναι (σχετικά) συμπαγές στον K.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathscr{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E,F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T:E\to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E=\{x\in E:\|x\|\leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T\in\mathscr{K}(E,F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.
Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Παράδειγμα

Αν $a=(a_n)\in c_0$, ο τελεστής $D_a=\mathrm{diag}(a_n)\in\mathscr{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: $D_a \in \mathscr{B}(\ell^2)$, όπου $a_n = \frac{1}{n}$).
Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathscr{F}(E,F) \subseteq \mathscr{K}(E,F) \subseteq \mathscr{B}(E,F).$$

Αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν υπόχωρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.
Ο $D_a \in \mathscr{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K.*
3. *Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).*
4. *Ο $(K,\rho|_K)$ είναι ολικά φραγμένος (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) και πλήρης.*

Θεώρημα

Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $T(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.

(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E, η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.

(iv) Το σύνολο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο.

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο $\mathscr{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathscr{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T,S \in \mathscr{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S \in \mathscr{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathscr{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{A} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{B} N$$

Λήμμα

Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach,

$$A \in \mathscr{B}(M,E),\ X \in \mathscr{K}(E,F) \ \textit{και}\ \ B \in \mathscr{B}(F,N)$$
$$\Longrightarrow \quad AX \in \mathscr{K}(M,F) \quad \textit{και} \quad XB \in \mathscr{K}(E,N)$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathscr{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathscr{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathscr{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathscr{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \to 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση: Ειδικότερα το $\mathscr{K}(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathscr{B}(E)$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathscr{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathscr{B}(H,K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathscr{F}(H,K)$ και $C \in \mathscr{B}(H,K)$ ώστε $\|C\| < \varepsilon$ και $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach.

Συμπαγείς Τελεστές

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής.
Απόδειξη. Αν $(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy$ προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης.
(Δες και το αρχείο `hscompn.pdf` στην η-τάξη.)

Πρόταση

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathscr{B}(H,K)$ τότε

$$T \in \mathscr{K}(H,K) \iff T^*T \in \mathscr{K}(H) \iff T^* \in \mathscr{K}(K,H).$$

Πρόταση

Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν ο A είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\mathrm{im}\, A}$ και $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμοι.

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι αναλλοίωτος (invariant) από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathscr{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος. Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E ανάγει (reduces) τον A όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι.
Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$. Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Δες και το αρχείο `invt.pdf` στην η-τάξη.

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Παρατήρηση Αν $x \in H$, ο υπόχωρος $E_x = \overline{\mathrm{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$ είναι A-αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν ο χώρος H *δεν* είναι διαχωρίσιμος και $x \neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος.
Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A-αναλλοίωτος. Αν ο H είναι *μιγαδικός* χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.
Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο) χώρο Hilbert H έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο;

ή μήπως υπάρχει τελεστής A που ικανοποιεί $E_x = H$ για κάθε $x \neq 0$;

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Απάντηση: όχι για γενικούς χώρους Banach, άγνωστο για *αυτοπαθείς* χώρους Banach.

• Το πρώτο παράδειγμα: P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.

• Στον ℓ_1: C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

• Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable $\mathscr{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).

• Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \to E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή (eigenvalue) της A αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) της A και το σύνολο

$$M_\lambda \equiv \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο ιδιόχωρος (eigenspace) της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \to E$ έχει ιδιοτιμές.
Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.
Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο ℓ^2 θεωρούμε τον τελεστή T όπου

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots) \quad x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2.$$

Ο T είναι συμπαγής, δεν έχει όμως ιδιοτιμές.

(β) Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή A όπου $(Af)(t) = tf(t)$, $f \in L^2([0,1])$.
Ο A είναι αυτοσυζυγής, δεν έχει όμως ιδιοτιμές.

Και τα δύο μαζί; Αυτοσυζυγής και συμπαγής;

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable) αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = \{a(n)\}$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = \{a(n)\}$ φραγμένη και

$$A = U^{-1} D_a U : \qquad A \overset{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \to \ell^2 : x_n \to e_n$ είναι unitary. Άρα
διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός.
Όταν $\dim H < \infty$:

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης)

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Ο A είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν είναι διαγωνοποιήσιμος.

Το (μινι) Φασματικό Θεώρημα

Λήμμα

Έστω $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathscr{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σ'έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathscr{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathscr{H}$ και $a_k \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathscr{H} \to \mathbb{C}^n$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Παράδειγμα

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση. Ορίζουμε

$$(K_f g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy.$$

Ο K_f είναι ολοκληρωτικός τελεστής (με πυρήνα την συνεχή συνάρτηση $k(x,y)=f(x-y)$.
Η $\{e_n : n\in\mathbb{Z}\}$ (όπου $e_n(x)=\exp inx$) είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([-\pi,\pi])$.

$$K_f e_n = \hat{f}(n)e_n \qquad (n\in\mathbb{Z}).$$

Επομένως ο τελεστής K_f διαγωνοποιείται από την ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$.

Το Φάσμα

Ορισμός

*Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή A σ'έναν χώρο Banach είναι το σύνολο*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο }\}.$$

Πρόταση

Το $\sigma(A)$ φράσσεται από $\|A\|$: Αν $|\lambda| > \|A\|$, ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Έστω $A \in \mathscr{B}(E)$ (όπου E χώρος Banach).

Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A (συμβ. $\lambda \in \sigma_p(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει $x \in E \setminus \{0\}$ ώστε $(A - \lambda I)x = 0$.

Το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A (συμβ. $\lambda \in \sigma_a(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq E$ με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.
Ισοδύναμα, $\lambda \notin \sigma_p(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in E$.

Προφανώς

$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A) \subseteq \sigma(A).$$

Το Φάσμα

Έστω H χώρος Hilbert.

Πρόταση

Έστω $A \in \mathscr{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$. Δηλαδή, αν το λ δεν είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, τότε ο $A - \lambda I$ έχει (φραγμ.) αντίστροφο.

Πρόταση

Έστω $A = A^* \in \mathscr{B}(H)$. Τότε
(α) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. *(β)* $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.
(γ) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$.
Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Πρόταση

Αν $A \in \mathscr{K}(H)$ είναι φυσιολογικός, τότε κάθε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή. (Ισχύει για κάθε συμπαγή: δες αργότερα.)

Πόρισμα

Αν $A \in \mathscr{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα Συμπαγούς Τελεστή

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathscr{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.
(Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathscr{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.)

Πρόταση

Έστω $A \in \mathscr{K}(H)$.

(i) Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.

(ii) Αν $\{x_n\}$ είναι άπειρη ορθοκανονική ακολουθία και υπάρχουν $\lambda_n \in \mathbb{C}$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{\lambda_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία.

(iii) Αν ο A είναι φυσιολογικός, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i \otimes y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H .$$

Θεώρημα

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) x_i \otimes y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathscr{B}(H, K)$.

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος:

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathscr{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \mathrm{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

Δες το αρχείο `nnspecth.pdf` *στην η-τάξη.*

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n. Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί $Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.
Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Λήμμα

Έστω $A \in B(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A-αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $B \in \mathscr{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$. Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^*-αναλλοίωτος.

Παράδειγμα

Αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο τελεστής $Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο $M = \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \geq 0\}}$ είναι U-αναλλοίωτος, αλλά ο $S := U|_M$ δεν ικανοποιεί $S^* = U^*|_M$, καθώς $Se_0 = 0$ ενώ $U^* e_0 = e_{-1}$.

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.

(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \quad \text{για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathscr{B}(H)$.

(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή)

Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{a(n)\}$ ώστε

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A-\sum_{n=1}^{N}a(n)P[x_n]\right\|=0 \qquad (\star)$$

(όπου $P[x_n]$ η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το x_n). Τότε η ακολουθία $\{a(n)\}$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Πόρισμα

Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Τότε

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\} \\
(ii) & \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}
\end{array}
$$

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert)

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) x_i \otimes y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathscr{B}(H, K)$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός: συμπαγείς τελεστές

Πρόταση (Δες το funcalc.pdf)

Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) P_n$ η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A, όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda(n) : n \in \mathbb{N}\}$ και $P_n = P(M_{\lambda(n)})$. Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε $A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda(n)) P_n x$ για κάθε $x \in H$. Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathscr{B}(H)$. Η απεικόνιση $f \to A_f$ είναι γραμμική, πολλαπλασιαστική (δηλ. $A_f A_g = A_{fg}$) και ικανοποιεί $A_f^* = A_{f^*}$ (όπου $f^*(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$) και $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.
Τέλος, αν $X \in \mathscr{B}(H)$,
$XA = AX \iff XP_n = P_n X \ \forall n \iff XA_f = A_f X \ \forall f$ φραγμένη στο $\sigma(A)$.

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται συναρτησιακός λογισμός (functional calculus). Όταν η f είναι πολυνώνυμο, τότε $A_f = f(A)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για A_f.

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Θεώρημα

Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert[7] *H,*
ή η εξίσωση

$$x - Kx = y \tag{2}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$,
ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Το Θεώρημα έπεται από τα επόμενα δύο Λήμματα.

Για τις αποδείξεις, δες το αρχείο `fredunn.pdf` *στην η-τάξη.*

---

[7] Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathscr{B}(H)$ *και* $\|T\| < 1$, *ο* $I - T$ *είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το* $\|\cdot\|$*-όριο της σειράς*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Λήμμα

Έστω $K \in \mathscr{B}(H)$ *συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής* $I - K$ *έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.*

Φάσμα συμπαγούς τελεστή

Πρόταση

Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathscr{K}(H)$ το σύνολο $\sigma(A) \setminus \{0\}$ αποτελείται μόνον από ιδιοτιμές του A και, αν είναι άπειρο, αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Πρόταση

Αν H είναι χώρος Hilbert, $A \in \mathscr{K}(H)$ και $\varepsilon > 0$, δεν υπάρχουν άπειρα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές λ του A με $|\lambda| \geq \varepsilon$.