Το φασματικό Θεώρημα

1 Το φάσμα ενός τελεστή

Λήμμα 1.1 *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ, τότε $A^*x = \bar{\lambda}x$.*

Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Απόδειξη. (α) Επειδή ο A είναι φυσιολογικός, ο $A - \lambda I$ είναι φυσιολογικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Έχουμε λοιπόν

$$\|(A - \lambda I)x\| = \|(A - \lambda I)^* x\| = \|(A^* - \bar{\lambda} I)x\|$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Άρα $Ax = \lambda x$ αν και μόνον αν $A^*x = \bar{\lambda}x$.

(β) Αν $Ax = \lambda x$ και $Ay = \mu y$, τότε $A^*y = \bar{\mu}y$ άρα

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, \bar{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

Συνεπώς, αν $\lambda \neq \mu$, τότε $x \perp y$ για κάθε $x \in M_\lambda$ και $y \in M_\mu$.

(γ) Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι αναλλοίωτος από τον A και από κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A, όπως ο A^*. Επομένως ο $A^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, ισοδύναμα (άσκηση) $A(M_\lambda^\perp) \subseteq M_\lambda^\perp$.

Άλλωστε, το συμπέρασμα είναι άμεσο από τις σχέσεις $Ax = \lambda x$ και $A^*x = \bar{\lambda}x$, που ισχύουν για $x \in M_\lambda$.□

Ορισμός 1.1 *Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Παρατήρηση. Αποδεικνύεται ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Εδώ, θα το δείξουμε για αυτοσυζυγείς τελεστές (Πρόταση 1.4).

Δεν είναι όμως αλήθεια το σημειακό φάσμα $\sigma_p(A)$ (δηλ. το σύνολο των ιδιοτιμών) είναι πάντα μη κενό. Δεν ισχύει δηλαδή ότι κάθε τελεστής, έστω και αυτοσυζυγής, έχει ιδιοτιμές.
Παράδειγμα ο $A \in \mathcal{B}(L^2([0,1],\lambda))$ (λ το μέτρο Lebesgue) με $(Af)(s) = sf(s)$ για $f \in L^2([0,1],\lambda)$.

Επίσης δεν είναι αλήθεια ότι κάθε συμπαγής τελεστής έχει ιδιοτιμές.
Παράδειγμα ο $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ με $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θα δείξουμε όμως ότι κάθε συμπαγής *και* αυτοσυζυγής τελεστής έχει ιδιοτιμές (Πρόταση 1.5).

Πρόταση 1.2 *Έστω A φραγμένος τελεστής σ' έναν χώρο Banach E. Το $\sigma(A)$ φράσσεται από $\|A\|$: Αν $|\lambda| > \|A\|$, ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς*

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $T = \frac{A}{\lambda}$ και $S_m = \sum\limits_{n=0}^{m} T^n$ τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \to 0$ (αφού $\|T\| < 1$),

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \qquad (\dagger)$$

Από την άλλη μεριά, αν $m > n$

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}\,.$$

Επειδή $\|T\| < 1$, έπεται ότι η ακολουθία $\{S_m\}$ είναι βασική στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(E)$, επομένως (πληρότητα!) συγκλίνει σε έναν $S \in \mathcal{B}(E)$. Από την (†) έχουμε ότι $(I - T)S = S(I - T) = I$, άρα $S = (I - T)^{-1}$. Τελικά έχουμε

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda} S = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n .$$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι *ιδιοτιμή* ενός τελεστή A (συμβ. $\lambda \in \sigma_p(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει $x \neq 0$ ώστε $(A - \lambda I)x = 0$.

Ορισμός 1.2 *Το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A (συμβ. $\lambda \in \sigma_a(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στον E με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.*

Ισοδύναμα, $\lambda \notin \sigma_a(A)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in E$.

Προφανώς

$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A) \subseteq \sigma(A)\,.$$

Πρόταση 1.3 *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$. Δηλαδή, αν το λ δεν είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, τότε ο $A - \lambda I$ έχει (φραγμ.) αντίστροφο.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Θα δείξω ότι ο τελεστής $T := A - \lambda I$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Ο T είναι 1-1, άρα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση: $S : T(H) \to H$ που είναι γραμμική. Είναι όμως και φραγμένη. Πράγματι: Αφού $\lambda \notin \sigma_a(A)$, ο $T = A - \lambda I$ είναι "κάτω φραγμένος", δηλ. υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in H$. Επομένως, για κάθε $y = Tx \in T(H)$ έχουμε

$$\|Sy\| = \|S(Tx)\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx\| = \frac{1}{\delta} \|y\|$$

δηλαδή $\|S\| \leq \frac{1}{\delta}$. Επομένως ο S επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\tilde{S} : \overline{T(H)} \to H$ που ικανοποιεί $\tilde{S}Tx = STx = x$ για κάθε $x \in H$ και $T\tilde{S}y = y$ για κάθε $y \in T(H)$ άρα και για κάθε $y \in \overline{T(H)}$.

Όμως, $\overline{T(H)} = H$. Πράγματι, αν $x \perp T(H)$, τότε για κάθε $z \in H$ έχουμε $\langle T^*x, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = 0$, άρα $T^*x = 0$. Επειδή ο T είναι φυσιολογικός, έχουμε $\|T^*x\| = \|Tx\| \geq \delta\|x\|$, και συνεπώς $x = 0$.

Τελικά λοιπόν ορίζεται φραγμένος τελεστής $\tilde{S} : H \to H$ που ικανοποιεί $\tilde{S}Tx = STx = x$ και $T\tilde{S}y = y$ για κάθε $x, y \in H$, δηλαδή $\tilde{S} = T^{-1}$. □

Πρόταση 1.4 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε*

(α) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
(β) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.
(γ) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$.
Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Απόδειξη. (α) Αν $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in H\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda - \bar{\lambda}|.\|x\|^2 &= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle (A - \bar{\lambda} I)x, x\rangle| \\ &= |\langle (A - \lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A - \lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A - \lambda I)x\|\|x\| \end{aligned}$$

οπότε
$$\|(A-\lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda-\bar{\lambda}|}{2}\|x\|.$$
Επομένως $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αλλά $\sigma_a(A)=\sigma(A)$ διότι ο A είναι φυσιολογικός, άρα $\lambda \notin \sigma(A)$.

(β) Αν $\phi(x,y)=\langle Ax,y\rangle$ και $\hat{\phi}(x)=\langle Ax,x\rangle$, γράφοντας $\|\hat{\phi}\|=\sup\{|\hat{\phi}(x)|:\|x\|=1\}$, αρκεί να δείξουμε ότι $|\phi(x,y)|\leq\|\hat{\phi}\|$ για κάθε $x,y\in H$ με $\|x\|\leq 1$ και $\|y\|\leq 1$. Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση έπεται ότι $\hat{\phi}(x)\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in H$. Επομένως, επειδή
$$4\phi(x,y)=\hat{\phi}(x+y)-\hat{\phi}(x-y)+i(\hat{\phi}(x+iy)-i\hat{\phi}(x-iy)),$$
έχουμε
$$4\operatorname{Re}\phi(x,y)=\hat{\phi}(x+y)-\hat{\phi}(x-y)$$
άρα [1]
$$4|\operatorname{Re}\phi(x,y)|\leq\|\hat{\phi}\|.(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)=2\|\hat{\phi}\|.(\|x\|^2+\|y\|^2) \tag{*}$$
από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν τώρα γράψουμε $\phi(x,y)=\lambda|\phi(x,y)|$ όπου $\lambda\in\mathbb{C}$ (οπότε $|\lambda|=1$), έχουμε $|\phi(x,y)|=\bar{\lambda}\phi(x,y)=\phi(x,\lambda y)$ άρα $\phi(x,\lambda y)\in\mathbb{R}$, οπότε από την (*) έχουμε
$$|\phi(x,y)|=\phi(x,\lambda y)\leq\|\hat{\phi}\|\frac{\|x\|^2+\|\lambda y\|^2}{2}\leq\|\hat{\phi}\|,$$
αφού $\|x\|\leq 1$ και $\|\lambda y\|\leq 1$.

(γ) Από το (β), υπάρχει μια ακολουθία $\{x_n\}$ με $\|x_n\|=1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ώστε $|\langle Ax_n,x_n\rangle|\to\|A\|$. Η ακολουθία πραγματικών (γιατί $A=A^*$) αριθμών $\{\langle Ax_n,x_n\rangle\}$ είναι φραγμένη, επομένως έχει μια υπακολουθία $\{\langle Ay_n,y_n\rangle\}$ που συγκλίνει, έστω στο $\lambda\in\mathbb{R}$, και προφανώς $|\lambda|=\|A\|$.
Θα δείξουμε ότι το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A. Έχουμε
$$\begin{aligned}0\leq\|Ay_n-\lambda y_n\|^2&=\langle Ay_n,Ay_n\rangle-\langle Ay_n,\lambda y_n\rangle-\langle\lambda y_n,Ay_n\rangle+\langle\lambda y_n,\lambda y_n\rangle\\&=\|Ay_n\|^2-2\lambda\langle Ay_n,y_n\rangle+\lambda^2\|y_n\|^2\qquad(\text{γιατί } A=A^* \text{ και } \lambda=\bar{\lambda})\\&\leq\|A\|^2-2\lambda\langle Ay_n,y_n\rangle+\lambda^2=2\lambda(\lambda-\langle Ay_n,y_n\rangle)\to 0\end{aligned}$$
επομένως $\lim_n(A-\lambda I)y_n=0$. □

Παρατήρηση Μια διαφορετική απόδειξη του (γ), που αποφεύγει το (β), μπορεί κανείς να βρει στην "Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών", Πρόταση 6.1.17.

Πρόταση 1.5 *Αν $A\in\mathcal{K}(H)$ είναι φυσιολογικός, τότε κάθε $\lambda\in\sigma(A)\setminus\{0\}$ είναι ιδιοτιμή.*
(Ισχύει για κάθε συμπαγή: δες αργότερα.)

Απόδειξη. Το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A. Συνεπώς υπάρχει ακολουθία $\{y_n\}$ στην μοναδιαία σφαίρα του H ώστε $\|Ay_n-\lambda y_n\|\to 0$. Αλλά ο A είναι συμπαγής, επομένως η $\{y_n\}$ έχει μια υπακολουθία $\{z_n\}$ ώστε η $\{Az_n\}$ να συγκλίνει, έστω στο w. Θα δείξουμε ότι $Aw=\lambda w$. Πράγματι, επειδή
$$\lim_n(Az_n-\lambda z_n)=0 \text{ και } \lim_n(Az_n-w)=0,$$
έχουμε $\lim_n\lambda z_n=w$, άρα, αφού ο A είναι συνεχής, $\lim_n A(\lambda z_n)=Aw$. Αλλά
$$\lim_n A(\lambda z_n)=\lambda\lim_n Az_n=\lambda w,$$
επομένως $Aw=\lambda w$. Τέλος, επειδή $w=\lim_n\lambda z_n$ όπου $\lambda\neq 0$ και $\|z_n\|=1$ για κάθε n, έπεται ότι $w\neq 0$, άρα το w είναι ιδιοδιάνυσμα του A. □

[1] χρησιμοποιώντας ότι $|\hat{\phi}(\frac{x}{\|x\|})|\leq\|\hat{\phi}\|$ για κάθε $x\neq 0$ και άρα $|\hat{\phi}(x)|\leq\|\hat{\phi}\|\,\|x\|^2$

Πόρισμα 1.6 *Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.*

Απόδειξη. Αφού ο A είναι αυτοσυζυγής, έχει μια προσεγγιστική ιδιοτιμή λ με $|\lambda| = \|A\|$. Αφού είναι συμπαγής, το λ είναι ιδιοτιμή. □

Παράδειγμα 1.7 *Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: παράδειγμα ο $D_a : e_n \to \frac{1}{n}e_n$ στον ℓ^2.*

Παρατήρηση. Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και ο χώρος H είναι απειροδιάστατος, τότε $0 \in \sigma(A)$. Γιατί αλλιώς, ο A θα είχε φραγμένο αντίστροφο A^{-1}, οπότε ο $I = AA^{-1}$ θα ήταν συμπαγής, πράγμα που δεν συμβαίνει σε απειροδιάστατους χώρους.

Πρόταση 1.8 *Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.*

(i) Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.

(ii) Αν $\{x_n\}$ είναι άπειρη ορθοκανονική ακολουθία και υπάρχουν $\lambda_n \in \mathbb{C}$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{\lambda_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία.

(iii) Αν ο A είναι φυσιολογικός, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Απόδειξη. *(i)* Αν $\lambda \in \sigma_p(A)$, τότε $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.

Επομένως, αν $\lambda \neq 0$, ο ταυτοτικός τελεστής στον χώρο Hilbert M_λ είναι συμπαγής, άρα ο M_λ έχει πεπερασμένη διάσταση.

(ii) Επειδή ο A είναι συμπαγής, έχουμε

$$\lambda_n = \langle Ax_n, x_n \rangle \to 0\,.$$

(iii) Αν υποθέσουμε ότι το $\sigma_p(A)$ είναι άπειρο και δεν αποτελεί μηδενική ακολουθία, θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ ώστε το σύνολο $\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \delta\}$ να είναι άπειρο. Θα υπάρχει λοιπόν μια άπειρη ακολουθία $\{\lambda_n\}$ διακεκριμένων ιδιοτιμών ώστε $|\lambda_n| \geq \delta$ για κάθε n. Αν x_n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$, η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική, γιατί οι ιδιόχωροι του A είναι ανά δυο κάθετοι αφού ο A είναι φυσιολογικός (Λήμμα 1.1). Τότε όμως $|\langle Ax_n, x_n \rangle| \geq \delta$ για κάθε n, πράγμα που αντιφάσκει με την συμπάγεια του A.. □

Παρατήρηση Ο μηδενοχώρος $\ker A$ (δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0) μπορεί να έχει οποιαδήποτε διάσταση:

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τον τελεστή D_a στον ℓ^2 με $D_a e_n = a(n)e_n$ όπου η $a = \{a(n)\}$ είναι μηδενική ακολουθία. Ο D_a είναι συμπαγής φυσιολογικός και $\sigma_p(D_a) = \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$. (*Άσκηση*)

Αν λοιπόν $a(n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\ker D_a = \{0\}$. Αν $a(n) = 0$ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών n, τότε ο $\ker D_a$ έχει πεπερασμένη διάσταση, και αν $a(n) = 0$ για άπειρο πλήθος δεικτών n, τότε ο $\ker D_a$ είναι απειροδιάστατος.

2 Το φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 2.1 *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο* $(\ker A)^{\perp}$.

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^{\perp}$ *ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^{\perp} \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ ((όπου $D_a = \operatorname{diag}(a(n)$ ο διαγώνιος τελεστής).

Το Θεώρημα έπεται άμεσα από το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2 *Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Οι ιδιόχωροι $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.

(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \ \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

Υπενθύμιση: *Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος* κλειστός *υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.*
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί $Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.

Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η ένωση $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Απόδειξη του Θεωρήματος $(i) \iff (ii)$ Από την υπενθύμιση είναι φανερό ότι οι ιδιόχωροι είναι κάθετοι ανά δύο και παράγουν τον H (δηλ. το ευθύ τους άθροισμα είναι ο H) αν και μόνον αν οι προβολές είναι κάθετες ανά δύο και το άθροισμά τους συγκλίνει κατά σημείο στον ταυτοτικό τελεστή.

Μένει να δείξουμε ότι, αν $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x$ για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ συγκλίνει στον A ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Έστω $x \in H$. Από τη σχέση $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_n x$ συμπεραίνουμε (αφού ο A είναι γραμμικός και συνεχής) ότι $Ax = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} AP_n x$. Όμως το $P_n x$ ανήκει στον ιδιόχωρο M_{λ_n} και άρα $AP_n x = \lambda_n P_n x$, οπότε έχουμε $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x$ (σύγκλιση κατά σημείο). Όμως, επειδή ο A είναι συμπαγής, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή:

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Αφού η ακολουθία (λ_n) είναι μηδενική (Πρόταση 1.8) υπάρχει n_0 ώστε $|\lambda_n| < \epsilon$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, αν $n \geq n_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k x \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k P_k x \right\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\lambda_k P_k x\|^2 \quad \text{γιατί τα } P_k x \text{ είναι κάθετα ανά δύο} \\
&\leq \epsilon^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \quad \text{γιατί } |\lambda_k| < \epsilon \text{ όταν } k \geq n_0 \\
&\leq \epsilon^2 \|x\|^2 \qquad\qquad \text{αφού} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \mid \leq \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι $\left\| A - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \right\| \leq \epsilon$ αν $n \geq n_0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Η σχέση $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$ δίνει $AP_n = P_n A = \lambda_n P_n$ αφού $P_n P_k = 0$ όταν $k \neq n$ άρα $A^* P_n = P_n A^* = \bar{\lambda}_n P_n$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}
A^* A &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^* P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_n P_n \\
\text{και} \quad AA^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n A^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_n P_n
\end{aligned}$$

άρα $AA^* = A^* A$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ (*Αυτό είναι το ουσιαστικό περιεχόμενο του Θεωρήματος.*)
Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο A είναι αυτοσυζυγής.

Από την Πρόταση 1.4, το σύνολο $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι μη κενό. Από το Λήμμα 1.1, οι ιδιόχωροι του A είναι ανά δύο κάθετοι και αναλλοίωτοι από τον A. Πρέπει να δείξουμε ότι παράγουν τον H.

Ονομάζουμε M τον ελάχιστο κλειστό υπόχωρο που περιέχει όλους τους M_λ (δηλαδή $M = \vee_\lambda M_\lambda$). Το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι $M = H$, δηλαδή ότι $M^\perp = \{0\}$.

Έστω ότι $M^\perp \neq \{0\}$. Επειδή κάθε M_λ είναι αναλλοίωτος από τον A, το ίδιο ισχύει [2] και για τον M. Αλλά ο A είναι αυτοσυζυγής, άρα αφήνει αναλλοίωτο και τον $M^\perp$.

Επομένως ο περιορισμός $B := A|_{M^\perp}$ ορίζει έναν τελεστή $B : M^\perp \to M^\perp$. Παρατηρούμε ότι ο $B \in \mathcal{B}(M^\perp)$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής (γιατί;).

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4, ο B θα έπρεπε να έχει ιδιοτιμές. Όμως, αν $Bx = \lambda x$ όπου $x \in M^\perp \setminus \{0\}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $Ax = Bx = \lambda x$, άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ (του A), επομένως $x \in M_\lambda \subseteq M$. Δηλαδή $x \in M \cap M^\perp$, άρα $x = 0$, άτοπο.

(β) Γενική περίπτωση.

Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$ φυσιολογικός. Θεωρούμε τον αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $T := A^* A$. Από την περίπτωση (α) οι ιδιόχωροι $\{M_\mu(T),\ \mu \in \sigma_p(T)\}$ του T είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H.

Παρατηρούμε ότι κάθε ιδιόχωρος $M_\mu(T)$ είναι αναλλοίωτος από τον A και από τον A^*. Πράγματι, επειδή $A^* A = AA^*$, έχουμε

$$A(A^* A) = (AA^*)A = (A^* A)A \quad \text{και} \quad A^*(A^* A) = A^*(AA^*) = (A^* A)A^* .$$

[2] Πράγματι, κάθε $x \in M$ γράφεται $x = \sum_\lambda P_\lambda x$ άρα $Ax = \sum_\lambda AP_\lambda x$ (συνέχεια του A). Όμως, κάθε $AP_\lambda x$ ανήκει στον M_λ, άρα στον M, οπότε $Ax \in M$.

Δηλαδή οι A και A^* μετατίθενται με τον $T = A^*A$, άρα αφήνουν τον $M_\mu(T) = \ker(T - \mu I)$ αναλλοίωτο. Επομένως ο τελεστής $C_\mu := A|_{M_\mu(T)}$ απεικονίζει τον $M_\mu(T)$ στον εαυτό του, δηλαδή $C_\mu \in \mathcal{B}(M_\mu(T))$, και έχουμε $C_\mu^* = A^*|_{M_\mu(T)}$ (δες το Λήμμα 2.3 αμέσως μετά). Έπεται ότι $C_\mu^* C_\mu = C_\mu C_\mu^*$, γιατί $A^*A = AA^*$, άρα ο C_μ είναι φυσιολογικός τελεστής στον $M_\mu(T)$.

Αν $\mu = 0$, ο ιδιόχωρος $M_0(T) = \ker T$ είναι ο πυρήνας $\ker A = M_0(A)$ του A (αποδ.: αν $x \in \ker T$ τότε $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0$ άρα $x \in \ker A$ και το αντίστροφο είναι προφανές).

Αν $\mu \neq 0$, ο αντίστοιχος ιδιόχωρος $M_\mu(T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση (Πρόταση 1.8). Ο C_μ είναι λοιπόν φυσιολογικός τελεστής σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης. Επομένως υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $M_\mu(T)$ από ιδιοδιανύσματα του C_μ, άρα του A (από το Φασματικό Θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης). Δηλαδή για κάθε $\mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, ο περιορισμός του A στον $M_\mu(T)$ διαγωνοποιείται ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}_\mu = \{e_n^\mu, n = 1, \ldots, n_\mu\}$. Άρα, η (αριθμήσιμη) ένωση των $\mathcal{B}_\mu$, $\mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ είναι ορθοκανονική βάση του A-αναλλοίωτου υποχώρου

$$N := \overline{\text{span}\{M_\mu(T) : \mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\}}$$

η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του A παράγουν τον χώρο N, άρα, μαζί με τον $\ker A = M_0(A)$, παράγουν τον χώρο H. □

Λήμμα 2.3 *Έστω $A \in B(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A-αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$. Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^*-αναλλοίωτος.*

Απόδειξη. Εφόσον εξ ορισμού ο B^* απεικονίζει τον M στον M, αν $B^* = A^*|_M$ τότε βέβαια ο A^* απεικονίζει τον M στον M.

Αντίστροφα, έστω $A^*(M) \subseteq M$. Έστω $x \in M$. Θα δείξω ότι $A^*x = B^*x$. Για κάθε $y \in M$ έχουμε $By = Ay$, άρα

$$\begin{aligned}\langle B^*x, y\rangle &= \langle x, By\rangle \quad (\text{ορισμός του } B^*)\\ &= \langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle.\end{aligned}$$

Επομένως $\langle B^*x - A^*x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in M$, οπότε το διάνυσμα $B^*x - A^*x$ είναι κάθετο στον M. Όμως $A^*x \in A^*(M) \subseteq M$ από την υπόθεση, άρα $B^*x - A^*x \in M$. Επομένως $B^*x - A^*x = 0$.

□

Παράδειγμα 2.4 *Αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ($Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), ο υπόχωρος $M = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq 0\}$ είναι U-αναλλοίωτος, αλλά ο περιορισμός $S := U|_M$ δεν ικανοποιεί $S^* = U^*|_M$, καθώς $Se_0 = 0$ ενώ $U^*e_0 = e_{-1}$.*

Θεώρημα 2.5 (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή) *Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{a(n)\}$ ώστε*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| A - \sum_{n=1}^{N} a(n)P[x_n] \right\| = 0 \qquad (\star)$$

(όπου $P[x_n]$ η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το x_n). Τότε η ακολουθία $\{a(n)\}$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Απόδειξη. Αν ο A ικανοποιεί την $(\star)$ τότε είναι $\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης, άρα συμπαγής. Επίσης, οι τελεστές αυτοί είναι φυσιολογικοί, άρα και ο A είναι φυσιολογικός.

Αντίστροφα, έστω A συμπαγής και φυσιολογικός. Έχουμε δείξει ότι υπάρχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, του χώρου $(\ker A)^\perp$ από ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές του. Δηλαδή υπάρχουν $a(n) \in \mathbb{C}$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$. Από την Πρόταση 1.8 η ακολουθία $\{a(n)\}$ είναι μηδενική, αν είναι άπειρη. Επειδή επιπλέον οι προβολές $P[x_n]$ είναι κάθετες ανά δύο, έπεται (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2) ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)P[x_n]$$

συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$. Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ το όριό της. Οι (φραγμένοι) τελεστές A και B μηδενίζονται στον $\ker A$ και συμπίπτουν σε κάθε x_n (διότι $Ax_n = a(n)x_n = Bx_n$) άρα συμπίπτουν και στην κλειστή γραμμική θήκη του $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή στον $(\ker A)^{\perp}$. □

3 Πρώτες συνέπειες

Πόρισμα 3.1 *Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Τότε*

$$\begin{array}{ll} (i) & \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\} \\ (ii) & \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \end{array}$$

Απόδειξη. Έστω $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$.
Με τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 2.2, γράφουμε $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, οπότε για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 \, \|P_n x\|^2 \leq \sup_n |\lambda_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \leq \sup_n |\lambda_n|^2 \|x\|^2$$

άρα
$$\|A\| \leq \sup_n |\lambda_n| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}.$$

Όμως το σύνολο $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι φραγμένο (από το $\|A\|$) και έχει μόνο σημείο συσσώρευσης το 0. Άρα έχει μέγιστο $|\lambda_o|$ ($\lambda_o \in \sigma_p(A)$). Αν x_o είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|x_o\| = 1$, έχουμε

$$\|A\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\} = |\lambda_o| = \|\lambda_o x_o\| = \|Ax_o\| \leq \|A\|,$$

άρα ισχύει ισότητα. Επίσης
$$|\langle Ax_o, x_o\rangle| = |\langle \lambda_o x_o, x_o\rangle| = |\lambda_o| = \|A\|$$
πράγμα που αποδεικνύει και το (ii), αφού η ανισότητα

$$\sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \leq \|A\|$$

είναι άμεση. □

Θεώρημα 3.2 (Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert)
Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{a(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} a(i) x_i \otimes y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$.

Υπενθύμιση: Αν $x \in K, y \in H$ ο τελεστής $x \otimes y^* : H \to K$ ορίζεται από τη σχέση

$$(x \otimes y^*)(z) = \langle z, y\rangle x, \; z \in H.$$

Ειδικότερα αν $\|y\| = 1$ ο τελεστής $y \otimes y^*$ είναι η προβολή στον υπόχωρο $[y]$ του H.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον θετικό συμπαγή τελεστή $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Από το Θεώρημα 2.5 γράφουμε

$$|A| = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) y_n \otimes y_n^*$$

(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$) όπου η $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $(\ker |A|)^{\perp}$ από ιδιοδιανύσματα του $|A|$ με (μη μηδενικές) ιδιοτιμές $\{a(n)\}$. Αν $A = U|A|$ είναι η πολική αναπαράσταση του A, θέτουμε $x_n = Uy_n$ και έχουμε

$$A = U|A| = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) U y_n \otimes y_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) x_n \otimes y_n^*.$$

Η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική γιατί είναι εικόνα της ορθοκανονικής ακολουθίας $\{y_n\}$ (που ανήκει στον χώρο $(\ker |A|)^{\perp} = \overline{\operatorname{im} |A|}$) μέσω της μερικής ισομετρίας U, που απεικονίζει ισομετρικά τον $\overline{\operatorname{im} |A|}$ επί του $\overline{\operatorname{im} A}$.

Δεύτερη Απόδειξη (χωρίς τη χρήση της τετραγωνικής ρίζας και πολικής αναπαράστασης).
Ονομάζουμε T τον θετικό συμπαγή τελεστή $T = A^*A$. Χρησιμοποιώντας το Φασματικό Θεώρημα γράφουμε

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) P[y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) y_n \otimes y_n^*$$

όπου η $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $(\ker T)^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$ από ιδιοδιανύσματα του T με (μη μηδενικές) ιδιοτιμές $\{\mu(n)\}$ (άρα $\mu(n) > 0$, αφού ο T είναι θετικός). Ορίζουμε $x_n = \dfrac{Ay_n}{a(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, όπου $a(n) = \sqrt{\mu(n)}$. Η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική: Πράγματι

$$\begin{aligned}\langle x_n, x_m \rangle &= \frac{1}{a(n)a(m)} \langle Ay_n, Ay_m \rangle = \frac{1}{a(n)a(m)} \langle A^*Ay_n, y_m \rangle \\ &= \frac{1}{a_n a_m} \langle \mu_n y_n, y_m \rangle = \frac{\mu(n)}{a(n)a(m)} \langle y_n, y_m \rangle = \delta_{nm},\end{aligned}$$

αφού η $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονική και $\mu(n) = a(n)^2$. Επειδή οι $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και η $\{a(n)\}$ είναι μηδενική (διότι η $\{\mu(n)\}$ είναι μηδενική), η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} a(i) x_i \otimes y_i^*$$

συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$ (απόδειξη: Άσκηση) και ορίζει φραγμένο (μάλιστα συμπαγή) τελεστή, έστω B. Παρατηρούμε ότι ο B μηδενίζεται στον υπόχωρο $[y_n : n \in \mathbb{N}]^{\perp} = \ker A^*A = \ker A$, ενώ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $By_n = a(n)x_n = Ay_n$, άρα οι (φραγμένοι) τελεστές A και B συμπίπτουν και στον $(\ker A)^{\perp}$, επομένως είναι ίσοι. $\square$