

Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι *αναλλοίωτος* (*invariant*) από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο κλειστός υπόχωρος \overline{E} είναι και αυτός A -αναλλοίωτος.

(Πράγματι: αν $x \in \overline{E}$ υπάρχει (x_n) στον E με $x_n \rightarrow x$, άρα $Ax = \lim_n Ax_n \in \overline{E}$ αφού κάθε $Ax_n \in E$.)

Θα λέμε ότι ο υπόχωρος E *ανάγει* (*reduces*) τον A όταν και ο E και ο E^\perp είναι A -αναλλοίωτοι.

Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Οι απεικονίσεις A_{ij} είναι οι εξής (όπου $P = P(\overline{E})$)

$$\begin{aligned} A_{11} : \overline{E} &\rightarrow \overline{E} : x \rightarrow PAx & A_{12} : E^\perp &\rightarrow \overline{E} : y \rightarrow PAy \\ A_{21} : \overline{E} &\rightarrow E^\perp : x \rightarrow (I - P)Ax & A_{22} : E^\perp &\rightarrow E^\perp : y \rightarrow (I - P)Ay. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

Ας παρατηρήσουμε ότι η προβολή P^\perp στον E^\perp είναι ο $I - P$.

Λήμμα 1 (α) Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A -αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (ισοδύναμα, αν και μόνον αν $P^\perp AP = 0$).

(β) Ο E είναι A^* -αναλλοίωτος αν και μόνον αν ο E^\perp είναι A -αναλλοίωτος, αν και μόνον αν $PA = PAP$ (ισοδύναμα, αν και μόνον αν $PAP^\perp = 0$).

(γ) Συνεπώς ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Απόδειξη (α) Αν ο E είναι A -αναλλοίωτος, τότε για κάθε $x \in H$ έχουμε $Px \in E$ άρα $APx \in E$ οπότε $PAPx = APx$. Δείξαμε ότι $AP = PAP$.

Αν ισχύει η σχέση $AP = PAP$, τότε για κάθε $x \in E$ έχουμε $Px = x$ και συνεπώς $Ax = APx = PAPx$, οπότε το Ax είναι στο σύνολο τιμών της P , που είναι ο E .

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για τον A^* βρίσκουμε ότι ο E είναι A^* -αναλλοίωτος αν και μόνον αν $A^*P = PA^*P$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $PA = PAP$. Όμως η τελευταία ισότητα ισοδυναμεί με την $A(I - P) = (I - P)A(I - P)$ η οποία γράφεται $AP^\perp = P^\perp AP^\perp$, οπότε (πάλι από το (α)) ισχύει αν και μόνον αν ο E^\perp είναι A -αναλλοίωτος.

(γ) Από το (β), ο E και ο E^\perp είναι A -αναλλοίωτοι αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PAP$ και $PA = PAP$. Οι δύο τελευταίες σχέσεις δίνουν $AP = PA$.

Αντίστροφα, αν $AP = PA$ τότε $AP^2 = PAP$ δηλαδή $AP = PAP$ οπότε $A(E) \subseteq E$, και επίσης $PAP = P^2A$ δηλαδή $PAP = PA$ οπότε $A(E^\perp) \subseteq E^\perp$. \square

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Παρατήρηση Αν $x \in H$, ο υπόχωρος $E_x = \overline{\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$ είναι A -αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν ο χώρος H δεν είναι διαχωρίσιμος και $x \neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος.

Συμπέρασμα: Σε μη διαχωρίσιμο χώρο, κάθε τελεστής έχει κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο εκτός από τους τετριμμένους $\{0\}$ και H .

Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A -αναλλοίωτος. Αν ο H είναι *μγαδικός* χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές.¹

¹... λέει το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

Συμπέρασμα: Σε μιγαδικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο.²

Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο) χώρο Hilbert H έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο?

... ή μήπως υπάρχει τελεστής A που ικανοποιεί $E_x = H$ για κάθε $x \neq 0$;

Η απάντηση είναι *άγνωστη* για τον ℓ^2 και γενικότερα για *αυτοπαθείς* χώρους Banach.

Έχουν όμως κατασκευασθεί χώροι Banach στους οποίους ορίζονται τελεστές χωρίς αναλλοίωτους υποχώρους.

- Το πρώτο παράδειγμα: P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.
- Στον ℓ_1 : C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1 , *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.
- Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable \mathcal{L}_∞ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).
- Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

²Βεβαίως σε πραγματικούς χώρους αυτό δεν ισχύει: για παράδειγμα ο τελεστής της στροφής κατά γωνία $\pi/3$ στον \mathbb{R}^2 δεν αφήνει αναλλοίωτο κανέναν γνήσιο υπόχωρο.