

Μερικές ισομετρίες και προβολές

Ορισμός 0.1 Έστω $E \subseteq \mathcal{H}_1$ κλειστός υπόχωρος. **Μερική ισομετρία με αρχικό χώρο** E είναι ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ώστε ο $V|_E$ να είναι ισομετρία και ο $V|_{E^\perp}$ να μηδενίζεται.

Παρατήρησε ότι αν $F = V(\mathcal{H}_1)$, τότε $F = V(E)$ άρα ο F είναι κλειστός υπόχωρος, γιατί ο E είναι πλήρης και ο $V|_E$ είναι ισομετρικός. Ο F ονομάζεται ο **τελικός χώρος** της V . Παρατήρησε επίσης ότι κάθε ορθή προβολή P είναι μερική ισομετρία με αρχικό και τελικό χώρο $P(\mathcal{H})$.

Πρόταση 1 Αν V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E και τελικό χώρο F , τότε η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E , η V^*V είναι η προβολή στον E (η **αρχική προβολή** του V) και η VV^* είναι η προβολή στον F (η **τελική προβολή** του V).

Αντίστροφα, αν $V \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ και ο τελεστής V^*V είναι προβολή, τότε ο VV^* είναι επίσης προβολή και η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $V^*V(\mathcal{H}_1)$ και τελικό χώρο $VV^*(\mathcal{H}_2)$.

Απόδειξη Έστω ότι η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E . Δείχνουμε ότι $V^*V = P_E$: Παρατήρησε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε $Vx = VP_Ex + VP_E^\perp x = VP_Ex$ γιατί ο V μηδενίζεται στον E^\perp . Επομένως, αν $x, y \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\langle V^*Vx, y \rangle = \langle Vx, Vy \rangle = \langle VP_Ex, VP_Ey \rangle = \langle P_Ex, P_Ey \rangle$$

γιατί η V είναι ισομετρία στον E . Άρα

$$\langle V^*Vx, y \rangle = \langle P_Ex, P_Ey \rangle = \langle P_Ex, y \rangle$$

για κάθε x, y , πράγμα που δείχνει ότι $V^*V = P_E$.

Έστω ότι, αντίστροφα, ο τελεστής $P = V^*V$ είναι προβολή. Θα δείξω ότι ο V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $E = P(\mathcal{H}_1)$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\|Vx\|^2 = \langle Vx, Vx \rangle = \langle V^*Vx, x \rangle = \langle Px, x \rangle = \|Px\|^2,$$

άρα αν $x \in P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = \|x\|$ και αν $x \perp P(\mathcal{H}_1)$ τότε $\|Vx\| = 0$. Δηλαδή ο V είναι ισομετρικός στον $P(\mathcal{H}_1)$ και μηδενίζεται στον $P(\mathcal{H}_1)^\perp$.

Έστω $F = V(\mathcal{H}_1)$. Επειδή $F = V(E)$ και η $V|_E$ είναι ισομετρία, ο F είναι κλειστός υπόχωρος του \mathcal{H}_2 . Θα δείξω ότι ο V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E . Πράγματι, για κάθε $y = Vx \in F$,

$$\begin{aligned}\|V^*y\|^2 &= \|V^*(Vx)\|^2 = \langle V^*Vx, V^*Vx \rangle = \langle (V^*V)^2x, x \rangle = \langle V^*Vx, x \rangle \\ &= \langle Vx, Vx \rangle = \|Vx\|^2 = \|y\|^2\end{aligned}$$

επειδή $(V^*V)^2 = P^2 = V^*V$. Άρα, η $V^*|_F$ είναι ισομετρία. Επίσης, απεικονίζει τον F επί του E γιατί για κάθε $x \in E$ έχουμε $Vx \in F$ και $V^*(Vx) = P_E x = x$.

Μένει να δειχθεί ότι η V^* μηδενίζεται στον F^\perp . Πράγματι, αν $z \in F^\perp$, για κάθε $x \in \mathcal{H}_1$ έχουμε

$$\langle V^*z, x \rangle = \langle z, Vx \rangle = 0$$

γιατί $Vx \in F$, άρα $V^*z = 0$. Δείξαμε ότι η V^* είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο F . Εφαρμόζοντας την πρώτη παράγραφο στην V^* , συμπεραίνουμε ότι η VV^* είναι η ορθή προβολή στον F . \square

Παρατήρηση 2 Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι η έννοια της μερικής ισομετρίας μπορεί να ορισθεί αλγεβρικά (χωρίς αναφορά δηλαδή στην δράση πάνω σ' έναν χώρο Hilbert) και μάλιστα σε κάθε C^* -άλγεβρα \mathcal{A} : ένα στοιχείο $V \in \mathcal{A}$ είναι μερική ισομετρία αν το $V^*V = P$ είναι ορθή προβολή δηλαδή αν $P = P^2 = P^*$. Μάλιστα

Αν $V \in \mathcal{A}$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (a) Το στοιχείο $P = V^*V$ είναι προβολή.
- (b) $VV^*V = V$.
- (c) $V^*VV^* = V^*$.
- (d) Το στοιχείο $Q = VV^*$ είναι προβολή.

Απόδειξη (a) \Rightarrow (b) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα C^* , έχουμε

$$\begin{aligned}\|V - VV^*V\|^2 &= \|V - VP\|^2 = \|(V^* - PV^*)(V - VP)\| \\ &= \|V^*V - V^*VP - PV^*V + PV^*VP\| \\ &= \|P - P^2 - P^2 + P^3\| = 0\end{aligned}$$

(b) \Rightarrow (a) Το V^*V είναι προφανώς αυτοσυζυγές και

$$(V^*V)^2 = V^*VV^*V = V^*(VV^*V) = V^*V.$$

Οι σχέσεις (b) και (c) είναι προφανώς ισοδύναμες (η μία είναι συζυγής της άλλης).

Τέλος, η ισοδυναμία (d) \Leftrightarrow (c) προκύπτει από την (a) \Leftrightarrow (b) θεωρώντας το V^* στη θέση του V .