Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. Έστω H χώρος Hilbert με $\dim H > 1$.
Να βρεθεί ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι φυσιολογικός.
Να βρεθεί ένας φυσιολογικός $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι αυτοσυζυγής.
Να βρεθεί ένας αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι θετικός.
Να βρεθεί ένας $V \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $VV^* = I$, αλλά δεν είναι unitary.
Τι συμβαίνει αν επιπλέον ο V είναι 1-1;

2. Έστω H απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Έστω $a = (a(n))$ φραγμένη ακολουθία. Δείξτε ότι ο τελεστής $T_a \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $T_a e_n = a(n)e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι θετικός τελεστής αν και μόνον αν $a(n) \geq 0$ για κάθε n.

Δείξτε απευθείας (δηλ. χωρίς τη χρήση του θεωρήματος ύπαρξης τετραγωνικής ρίζας) ότι τότε υπάρχει $S \in \mathcal{B}(H), S \geq 0$ ώστε $S^2 = T$ ο οποίος επιπλέον μετατίθεται με κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που μετατίθεται με τον T.

3. Αν $f \in C([0,1])$, δείξτε ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f \in B(L^2([0,1])$ είναι μη αρνητικός αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

4. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή
$T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{smallmatrix}\right]$, δηλαδή $T = \left[\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix}\right]$. να δειχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

5. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, είναι αλήθεια ότι ο χώρος $T(H_1)$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H_2;

6. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Να δειχθεί ότι $(A(H_1))^\perp = \ker(A^*)$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$. Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$. Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$; [Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

7. Ένας φραγμένος τελεστής $V : H_1 \to H_2$ είναι μερική ισομετρία αν ο $V|_E : E \to H_2$ είναι ισομετρία, όπου $E := (\ker V)^\perp$ είναι ο *αρχικός χώρος* του V και $F := V(H_1)$ ο *τελικός χώρος* του V. Δείξτε ότι οι E και F είναι κλειστοί υπόχωροι των H_1 και H_2.

Αν $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο E και τελικό χώρο $F := V(H_1)$, δείξτε ότι ο τελεστής V^* είναι επίσης μερική ισομετρία, με αρχικό χώρο F και τελικό χώρο E.

8. Δείξτε ότι η πολική αναπαράσταση $T = V|T|$ ενός $T \in \mathcal{B}(H)$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα μοναδικότητας: Αν $T = UX$ όπου $X \geq 0$ και U μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$ τότε $U = V$ και $X = |T|$.

Δείξτε επίσης ότι οι V και $|T|$ μετατίθενται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον T και τον T^*.