Ο συναρτησιακός λογισμός για συμπαγείς τελεστές [1]

Θεώρημα 1. *Έστω $A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση του συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A, όπου $\lambda_0 = 0$, $\{\lambda_n : n \geqslant 1\}$ μια αρίθμηση των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A και $P_n = P(M_{\lambda_n})$. Αν $f : \sigma_p(A) \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε, για κάθε $x \in H$,*

$$A_f x = \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.

Ο τελεστής A_f είναι συμπαγής αν και μόνο αν $f(\lambda_n) \to 0$ και ο τελεστής $f(0)P_0$ έχει πεπερασμένη τάξη. [2]

Η απεικόνιση $f \to A_f$ είναι γραμμική, πολλαπλασιαστική (δηλ. $A_f A_g = A_{fg}$) και ικανοποιεί $A_f^* = A_{f^*}$ (όπου $f^*(\lambda) = \overline{f(\lambda)}$) και $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **συναρτησιακός λογισμός (functional calculus)**. Όταν η f είναι πολυώνυμο, τότε $A_f = f(A)$. Πράγματι, αν π.χ. $f(t) = t^2$ τότε

$$A^2 x = A \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 P_n x = A_f x$$

για κάθε $x \in H$ και ομοίως $A^m x = A_g x$ όταν $g(t) = t^m$. Γι αυτό το λόγο, συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για A_f.

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 2. *Αν $\{Q_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι κάθετες ανά δύο προβολές και (b_n) είναι φραγμένη ακολουθία, τότε*

(i) για κάθε $x \in H$ η σειρά $Bx := \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n x$ συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο γραμμικό φυσιολογικό τελεστή $B : H \to H$ με νόρμα $\|B\| = \|b\|_\infty$ που μετατίθεται με κάθε Q_n.

(ii) αν η ακολουθία (b_n) είναι μηδενική, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή (στον B). Στην περίπτωση αυτή, ο B είναι συμπαγής αν και μόνον αν κάθε $b_n Q_n$ έχει πεπερασμένη τάξη.

Απόδειξη του Λήμματος. (i) Θέτουμε $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n Q_n$. Για κάθε $x \in H$, τα διανύσματα $\{Q_n x : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ανά δύο κάθετα. Συνεπώς από το Πυθαγόρειο θεώρημα, αν $k > m$ έχουμε

$$\left\| \sum_{n=m}^{k} b_n Q_n x \right\|^2 = \sum_{n=m}^{k} \|b_n Q_n x\|^2 \leqslant \max\{|b_i|^2 : m \leqslant i \leqslant k\} \sum_{n=m}^{k} \|Q_n x\|^2. \tag{1}$$

Επειδή $\max\{|b_i|^2 : m \leqslant i \leqslant k\} \leqslant \sup |b_n| = \|b\|_\infty$ και η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i x\|^2$ συγκλίνει (Πρόταση 2.5.12), έπεται από την τελευταία ανισότητα ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\{B_n x\}$ είναι βασική. Θέτουμε $Bx = \lim_n B_n x$ και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση B :

[1] funcalc, 25/5/2015, compiled 25 Μαΐου 2015

[2] Δηλαδή, ή ο $M_0 = \ker A$ έχει πεπερασμένη διάσταση, ή $f(0) = 0$.

$x \to Bx$ είναι γραμμική (κατά σημείο όριο γραμμικών απεικονίσεων). Επίσης, από την (1) έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\|B_k x\|^2 \leqslant \max\{|b_i|^2 : 1 \leqslant i \leqslant k\}.\|x\|^2 \leqslant \|b\|_\infty \|x\|^2$$

$$\text{άρα} \qquad \|Bx\|^2 = \lim_k \|B_k x\|^2 \leqslant \|b\|_\infty \|x\|^2$$

επομένως η B είναι και συνεχής, δηλαδή $B \in \mathcal{B}(H)$ και $\|B\| \leqslant \|b\|_\infty$. Εύκολα βλέπουμε ότι εδώ ισχύει ισότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγοντας $x \in Q_n(H)$ νόρμας 1 έχουμε $Bx = BQ_n x = b_n Q_n x$ (αφού $Q_m Q_n x = 0$ όταν $n \neq m$) άρα

$$|b_n| = \|b_n Q_n x\| = \|BQ_n x\| \leqslant \|B\| \|Q_n x\| = \|B\|$$

οπότε $\sup |b_n| \leqslant \|B\|$, οπότε $\|B\| = \|b\|_\infty$.

Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $y \in H$ έχουμε, εφόσον $Q_m Q_n = Q_n Q_m = \delta_{n,m} Q_m$,

$$Q_n Bx = \sum_{m=1}^{\infty} b_m Q_n Q_m y = b_n Q_n y = BQ_n y$$

(αφού $Q_n y \in Q_n(H)$) δηλαδή ο B μετατίθεται με κάθε Q_n.

Έπεται ότι και ο B^* μετατίθεται με κάθε Q_n ($B^* Q_n = (Q_n B)^* = (BQ_n)^* = Q_n B^*$) και συνεπώς με τον B: για κάθε $x \in H$

$$B^* Bx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n B^* Q_n x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Q_n B^* x = BB^* x.$$

Δηλαδή ο B είναι φυσιολογικός.

(ii) Υποθέτουμε τώρα ότι $b_n \to 0$. Από την ανισότητα (1) έχουμε

$$\left\| \sum_{n=m}^{k} b_n Q_n \right\| \leqslant \max\{|b_i| : m \leqslant i \leqslant k\}.$$

Αφού η $\{b_n\}$ είναι μηδενική ακολουθία, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $m_o \in \mathbb{N}$ ώστε $|b_i| \leqslant \epsilon$ για κάθε $i \geqslant m_o$. Έπεται από την τελευταία ανισότητα ότι για κάθε $k > m \geqslant m_o$,

$$\|B_k - B_{m-1}\| = \left\| \sum_{n=m}^{k} b_n Q_n \right\| \leqslant \epsilon.$$

Δηλαδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n Q_n$ αποτελούν βασική ακολουθία ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$, συνεπώς η σειρά συγκλίνει.

Τέλος, αν κάθε $b_n Q_n$ είναι πεπερασμένης τάξης, τότε κάθε B_N είναι συμπαγής οπότε το $\|\cdot\|$-όριό τους, B, είναι συμπαγής. Αντίστροφα αν ο B είναι συμπαγής τότε κάθε $b_n Q_n = BQ_n$ είναι συμπαγής, και άρα αυτομάτως πεπερασμένης τάξης (γιατί αν υπάρχει άπειρη ορθοκανονική ακολουθία (x_i) στον $BQ_n(H)$ τότε η εικόνα της, $(BQ_n x_i) = (b_n x_i)$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία). $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος. Από το Λήμμα 5 έπεται ότι ο A_f είναι καλά ορισμένος, φραγμένος και φυσιολογικός και ότι $\|A_f\| = \sup\{|f(\lambda)| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

Έστω ότι $f(\lambda_n) \to 0$ και ότι ο τελεστής $f(0)P_0$ έχει πεπερασμένη τάξη. Τότε όλοι οι τελεστές $f(\lambda_n)P_n$ έχουν πεπερασμένη τάξη, άρα από το Λήμμα ο A_f είναι συμπαγής.

Αν αντίστροφα ο A_f είναι συμπαγής, τότε επειδή για κάθε $x \in H$ και $n \in \mathbb{Z}_+$ έχουμε

$$A_f(P_n x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) P_k(P_n x) = f(\lambda_n) P_n x,$$

η σχέση $A_f P_n = f(\lambda_n) P_n$ δείχνει ότι κάθε $f(\lambda_n) P_n$ είναι συμπαγής τελεστής, άρα πεπερασμένης τάξης (αφού είναι πολλαπλάσιο μια προβολής). Επιλέγοντας για κάθε $n \geqslant 1$ ένα $x_n \in P_n(H)$ νόρμας 1, έχουμε μια ορθοκανονική ακολουθία (x_n) (αφού ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα) και συνεπώς $\langle A_f x_n, x_n \rangle \to 0$ αφού ο A_f είναι συμπαγής. Όμως $\langle A_f x_n, x_n \rangle = \langle f(\lambda_n) x_n, x_n \rangle = f(\lambda_n)$ και συνεπώς $f(\lambda_n) \to 0$.

Η σχέση $A_{f+\mu g} = A_f + \mu A_g$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του A_f.

Επίσης, αφού οι P_n είναι αν δύο κάθετες, όπως στην απόδειξη του Λήμματος έχουμε $A_f P_n = f(\lambda_n) P_n$ και συνεπώς, για κάθε $x \in H$,

$$\begin{aligned} A_f A_g x &= A_f \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) A_f P_n x = \sum_{n=1}^{\infty} g(\lambda_n) f(\lambda_n) P_n x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (fg)(\lambda_n) P_n x = A_{fg} x \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \left\langle A_f^* x, y \right\rangle &= \langle x, A_f y \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle x, P_n y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} \langle P_n x, y \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f(\lambda_n)} P_n x, y \right\rangle = \langle A_{f*} x, y \rangle . \qquad \square \end{aligned}$$