Συναρτησιακός Λογισμός: 25 Μαΐου

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \sin A := \begin{bmatrix} \sin\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{bmatrix}$$

$$A = \sum \lambda_\kappa P_\kappa \qquad P_\kappa = P(M_{\lambda_\kappa})$$

$\lambda_\kappa \in \sigma_p(A)$

Αν $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ μια τυχαία συνάρτηση

Ορίζω: $f(A) := \sum f(\lambda_\kappa) P_\kappa$

σε πεπερ. διάστ.: ΟΚ

Παρατ: Αν $f(t) = \sum_{\kappa=0}^{\nu} c_\kappa t^\kappa$: πολυώνυμο

τότε βρίσκουμε: $f(A) = \sum_{\kappa=0}^{n} c_\kappa A^\kappa$

Σε απειροδιάστατους χώρους;

Λήμμα Αν $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ κάθετες ανά 2 προβολές και $\{b_n\}$ φραγμ. ακολ. αριθμών τότε ορίζεται ένας φραγμ. τελ. B. τ.ω

$$\forall x \in H \quad Bx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n x \quad (\text{συγκλίνει στον } H)$$

Αποδ

νδο ότι $\overbrace{\left(\text{η } \sum b_n a_n x \text{ συγκλίνει στο } H \right.}^{\forall x \in H}$:

$n > m$

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \underbrace{b_k a_k x}_{\text{κάθετα}} \right\|^2 \overset{\text{Πυθ.}}{=} \sum_{k=m}^{n} \| b_k a_k x \|^2$$

$$\leq \underbrace{\|b\|_{\infty}^2}_{\sup |b_k|^2} \sum_{k=m}^{n} \| a_k x \|^2$$

Ξέρω ότι $\forall x$, $\sum_{k=1}^{n} a_k x \xrightarrow{\| \, \|}$ κάπου
(στην προβολή ax του x στον μικρότερο υπόχωρο $a(H)$ που $\supseteq \forall a_k(H)$)

άρα $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n > m > n_0$

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} a_k x \right\| < \varepsilon$$

άρα $\sum_{k=m}^{n} \| a_k x \|^2 < \varepsilon^2$

Άρα η $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k a_k x\right)$ είναι βασική,

άρα υπάρχει $Bx \in H$ ώστε

$$Bx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k a_k x$$

$$= \lim_{n\to\infty} B_n x$$

όπου

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k \in B(H)$$

μάλιστα $\|B_n\| = \max_{k\le n} |b_k| \le \|b\|_\infty$

Η απεικ. B είναι κσ όριο γραμμικών, άρα B γραμμική.

Είναι όμως και φραγμένη, διότι:

$\forall x$, $\|Bx\| = \lim \|B_n x\| \le \|b\|_\infty \|x\|$

άρα B φραγμένη, με $\|B\| \le \|b\|_\infty$

μάλιστα ισχύει $\|B\| = \|b\|_\infty$

Απόδ: $\forall n$, $B a_n x = b_n a_n x$ $(*)$

(αφού $B(a_n x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{a_k(a_n x)}_{\text{κάθετα}} = b_n a_n x$.)

Άρα, $\forall n$, αν $x_n = a_n x_n$ με $\|x_n\| = 1$

τότε $|b_n| = \|b_n a_n x_n\| = \|B a_n x_n\| \le \|B\|$ $\forall n$

άρα $\|b\|_\infty = \sup_n |b_n| \le \|B\| \le \|b\|_\infty$

ισότητα

$\blacksquare$

Σημείωση: Δεν ισχύει εν γένει ότι η σειρά
$\sum b_n a_n$ συγκλίνει στον $(B(H), \| \|)$

πχ Αν κάθε $b_n = 1$

και $a_n = P([e_n])$ στον ℓ^2

τότε $\sum_{k=1}^{n} b_k a_k = P[e_1, e_2 \dots e_n])$

και συγκλίνει κατά σημείο στον τελ. I

αλλά $\forall x$,

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x \| = \| P([e_1 \dots e_n])^{\perp} x \|$$

άρα $\| I - \sum_{k=1}^{n} a_k \| = \| P[e_1 \dots e_n]^{\perp} \|$

$= 1 \ \forall n$

Άτοπο

Είναι μια προβολή
$\neq 0$
άρα $\| \ \| = 1$!

Δείξαμε ότι:

$\forall x,\quad Bx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n x$ συγκλίνει

και $\quad B \in B(H)\quad , \|B\| = \|b\|_\infty$

<u>Ισχ</u> B φυσιολογικός:

<u>Αποδ</u>

Είδαμε ότι $B a_n x = b_n a_n x \quad \forall n\ \forall x$

ομοίως $a_n B x = b_n a_n x \quad$ " "

άρα $B a_n = a_n B \quad \forall n$

$\Downarrow$ (πάρε $*$)

$a_n B^* = B^* a_n \quad \forall n$

$\Rightarrow \underline{B^* B x} = B^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n x\right)$

$\forall x \qquad = \sum_n b_n B^* a_n x =$

$= \sum_n b_n a_n (B^* x) = \underline{B(B^* x)}$

άρα $B^*B = BB^*$: B φυσιολογικός $\blacksquare$

Το λήμμα αποδείχθηκε.

Συναρτησιακός Λογισμός

Έστω $A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$ συμπ + φυσιολ

($\acute{o}\pi o \upsilon$ $\lambda_0 = 0$)

και $f : \sigma_p(A) \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ φραγμ.

ορίζουμε

$$A_f : x \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x$$

θα δείξουμε ότι ο A_f ορίζεται και είναι φυσιολ τελεστής $\|A_f\| = \sup_n \{|f(\lambda_n)|\}$

Θεωρώ την απεικόνιση $f \longmapsto A_f$

• Είναι γραμμική:

$$A_{(f+\lambda g)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f+\lambda g)(\lambda_n) P_n x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(f(\lambda_n) + \lambda g(\lambda_n) \right) P_n x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n) P_n(x) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} g(\lambda_n) P_n x$$

$$= A_f(x) + \lambda A_g(x)$$

• Είναι πολλ/στική, δηλ. $A_{fg} = A_f A_g$, δηλ:

$$A_{fg}(x) = A_f(A_g(x))$$

δηλ. $\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) g(\lambda_n) P_n x$

$$\| $$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} g(\lambda_k) P_k x \right)}_{\text{σημεία}}$$

Απόδ. $A_f(A_g x) = A_f\left(\sum g(\lambda_n) P_n x\right)$

$$= \sum g(\lambda_n) A_f P_n x \qquad (*)$$

Αλλά: $A_f P_n x = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k) \underbrace{P_k (P_n x)}_{\text{κάθετα}}$

$$= f(\lambda_n) P_n x$$

$$(*) = \sum_n g(\lambda_n) f(\lambda_n) P_n x$$

$$A_f(A_g(x)) = \quad = \sum_n (fg)(\lambda_n) P_n x$$

$$\|$$

$\forall x$ $\qquad A_{fg} x$

άρα $A_f A_g = A_{fg}$

τέλος $A_f^* = A_{\bar{f}}$

διότι:

$$\langle A_f^* x, y\rangle \overset{\text{ορ}}{=} \langle x, A_f y\rangle$$

$$= \langle x, \sum f(\lambda_n) P_n y\rangle$$

$$= \sum \overline{f}(\lambda_n) \langle x, P_n y\rangle \qquad \forall x, y$$

$$= \sum \overline{f}(\lambda_n) \langle P_n x, y\rangle$$

$$= \langle \left(\sum \overline{f}(\lambda_n) P_n x\right), y\rangle$$

$$= \langle A_{\overline{f}} x, y\rangle \qquad ''$$

αρα $A_f^* x = A_{\overline{f}} x \quad \forall x \in H$

αρα $A_f^* = A_{\overline{f}}$.

Τώρα: $Ax = \sum \lambda_n P_n x$

$$\Downarrow$$

$$A^2 x = A(Ax) = A\left(\sum \lambda_n P_n x\right) =$$
$$= \sum \lambda_n (A P_n x) = \sum \lambda_n (\lambda_n P_n x)$$
$$= \sum \lambda_n^2 P_n x$$

και γενικά,
αν $f(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m$
οπότε $f(A) = c_0 I + c_1 A + \dots + c_m A^m$

έχω: $A_f x = \sum_n f(\lambda_n) P_n x =$

$$= \sum_n \left(c_0 + c_1 \lambda_n + c_2 \lambda_n^2 + \dots + c_m \lambda_n^m\right) P_n x$$

$$= (c_0 x + c_1 A x + c_2 A^2 x + \dots + c_m A^m x$$
$$= f(A) x$$

δηλ. $A_f = f(A)$.

Τέλος

Ο A_f είναι συμπαγής ανν $\lim_{n\to\infty} f(\lambda_n)=0$ και ο τελεστής $f(0)P_0$ έχει πεπερ. τάξη.

Απόδειξη: Ισχύς, $\sum_{n=0}^{\infty} f(\lambda_n)P_n$ συγκλίνει στη νόρμα του $B(H)$

(Υπενθύμιση Απόδ:

$$\left\| \sum_{n=m}^{N} f(\lambda_n)P_n x \right\|^2 \leq$$

$$\leq \max_{m\leq n\leq N} |f(\lambda_n)|^2 \|x\|^2$$

άρα $\left\| \sum_{n=m}^{N} f(\lambda_n)P_n \right\|^2 \leq \max_{m\leq n\leq N} |f(\lambda_n)|^2$

το οποίο, $\forall \epsilon>0$, μπορώ να βρω $m_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\dots < \epsilon^2$, αφού $f(\lambda_n)\to 0$)

άρα,

$$A_f = \|\ \|\text{-}\lim \underbrace{\sum_{n=0}^{N} f(\lambda_n)P_n}_{\text{πεπερ. τάξη}}$$

Άρα A_f συμπαγής.

Αντίστροφα, αν A_f συμπαγής, τότε

$$A_f P_n x = f(\lambda_n)P_n x \quad \forall n\ \forall x$$

(άρα $A_f P_0 = f(0)P_0$ συμπαγής άρα $f(0)P_0$ έχει πεπερ. τάξη)

$\forall n$, έστω $\|x_n\|=1$ με $x_n=P_n x$

Επειδή $P_n x \perp P_m x$

η (x_n) είναι ορθοκανονική

έχω:

$$\langle A_f x_n, x_n\rangle = \langle A_f P_n x_n, x_n\rangle =$$

$$= f(\lambda_n)\langle x_n, x_n\rangle = f(\lambda_n)$$

άρα

$$f(\lambda_n) = \langle A_f x_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$$ διότι A_f συμπ. και (x_n) ΟΚ

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm

Σε χώρο πεπερ. διάστασης:

$K : H \to H$ γραμμική

Θεωρώ την εξίσωση

$$(I-K)x = y \qquad (\Sigma)$$

Δυοίν θάτερον;

ή η (Σ) έχει μοναδική λύση $\forall y$

ή αλλιώς η $(I-K)x = 0$ έχει (πεπερ. πλήθος) γραμμ. ανεξ. λύσεις $x_1 \ldots x_k$

(οπότε αν $\exists\, x_0$ λύση της (Σ), τότε όλες οι λύσεις της (Σ) είναι της μορφής $x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$)

<u>Θεώρημα</u> Αν $K: H \to H$ συμπαγής τότε

ο $I-K$ είναι αντιστρέψιμος

(δηλ. $\forall y, \exists! x : (I-K)x = y$)

ή αλλιώς η $(I-K)x = 0$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση

ή αλλιώς η $\left(\begin{matrix} I-K)x=0 \\ \text{έχει πεπερ. πλήθος γραμμ.} \\ \text{ανεξ. λύσεων.} \end{matrix}\right.$

<u>Απόδ</u> Αν ο $I-K$ δεν είναι 1-1 τότε ο ιδιόχωρος:

$$M_1(K) = \{x : Kx = x\}$$

δεν είναι $= \{0\}$

όμως K συμπαγής, άρα $M_1(K)$ έχει πεπερ. διάσταση

Έστω αντίθετα ότι ο $I-K$ είναι 1-1

θέλω νδο έχει αντίστροφο και μάλιστα φραγμ. αντίστροφο

Ξέρω ότι $\forall$ συμπ. προσεγγίζεται από τελ. πεπερ. τάξης (H: Hilbert)

$\exists$ $F \in B(H)$ πεπερ. τάξης με

$$\|F - K\| < 1$$

Θεωρώ $K_1 = K - F$

κοιτάω τον $I - K_1$ ισχυρ. ότι είναι αντιστρέψιμος

Απόδ Θ.δ.ο η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} K_1^n$ συγκλίνει στον αντίστροφο του $I - K_1$.

(για $|z| < 1$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$)

Απόδ $S_n = \sum_{m=0}^{n} K_1^m$

$n > m$:

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m}^{n} K_1^k \right\|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \|K_1^k\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|K_1\|^k$$

Επειδή $\|K_1\| < 1$, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \|K_1\|^n$ συγκλίνει

στο $\frac{1}{1-\|K_1\|}$ (γεωμ. σειρά με λόγο $\|K_1\| < 1$)

άρα (S_n) είναι βασική ως προς $\| \ \|$

άρα $\exists\, S = \lim S_n$.

Τώρα $S(I-K_1) = \lim S_n(I-K_1)$

αλλά $S_n(I-K_1) = \sum_{k=0}^{n} (K_1^k - K_1^{k+1})$

$= I - K_1^{n+1}$

$\longrightarrow I$

διότι $\|K_1^{n+1} - 0\| \leq \|K_1\|^{n+1} \longrightarrow 0$

όμοια $(I-K_1)S_n \longrightarrow I$

άρα $S(I-K_1) = I = (I-K_1)S$

δηλ. $S = (I-K_1)^{-1}$ ∎

Δείξαμε: **Λήμμα** Αν $\|K_1\| < 1$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} K_1^n \text{ συγκλίνει στον } (I-K_1)^{-1}$$

Έχουμε θέσει: $K_1 = K - F$

οπότε $\|K_1\| < 1$

άρα ο $(I-K_1)^{-1}$ υπάρχει στον $B(H)$

Γράφω $G = F(I-K_1)^{-1}$: πεπερ. τάξης

άρα

Ισχυρ. $I - G$ είναι 1-1

διότι $I - G = \underbrace{(I-K)}_{1-1}\underbrace{(I-K_1)^{-1}}_{1-1}$

από υπόθ.

Ονομάζω $T = (I-G)\big|_{\operatorname{Im} G = H_0}$: πεπερ. διάστ.

άρα $\dim H_0 < \infty$ έπεται ότι ο T είναι και επί του H_0

Ισχ. $I - G$ είναι επί του H.

Έστω $y \in H$ θεωρώ $v = Gy \in H_0$

όπως αφού $T(H_0) = H_0$,

$\exists\, u \in H_0 : Tu = Gy$

δηλ. $u - Gu = Gy$

Θέτω $x = y + u$

και έχω

$$(I-G)x = (I-G)y + u - Gu = y - Gy + Gy = y$$

άρα $I - G$ επί.

Όμως $I-K = \underbrace{(I-G)}_{\text{επί}}\underbrace{(I-K_1)}_{\text{επί}}$

άρα ο $I-K : H \to H$ είναι 1-1 και επί

άρα υπάρχει ο $Y := (I-K)^{-1} : H \to H$

Δ.ο. Y φραγμ.

Απόδ. Έστω όχι τότε $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists\ x_n \in H$ με $\|x_n\| = 1$

ώστε $\|Yx_n\| > n$

Θέτω $y_n = \dfrac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$ ∴ έχω (y_n) φραγμ.

άρα K συμπ., η (Ky_n) έχει

υπακολ. $Ky_{m_n} \xrightarrow{\|\ \|} z$

Όμως $(I-K)y_{m_n} = (I-K)\dfrac{Yx_{m_n}}{\|Yx_{m_n}\|}$

$$= \frac{x_{m_n}}{\|Yx_{m_n}\|}$$

$\Rightarrow \|(I-K)y_{m_n}\| < \dfrac{1}{n} \quad \forall n$

άρα $(I-K)y_{m_n} \to 0$

όμως $Ky_{m_n} \to z$

άρα $y_{m_n} \to z$ άρα $\|z\| = 1$

$\Downarrow$

$Ky_{m_n} \to Kz$

Αλλά

$Kz = \lim Ky_{m_n} = z \neq 0$

άρα $(I-K)z = 0$ άτοπο αφού $I-K$ 1-1

συνεπώς $Y = (I-K)^{-1}$ είναι φραγμ.! ∎