Θεώρ. A συμπ + αυτοσυζ. τότε:

- Οι ιδιόχωροι $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι $\perp$ ανά δύο
- παράγουν τον χώρο H
  δηλ. ο μικρότερος κλ. υπόχ. που περιέχει κάθε M_λ είναι όλος ο H

Αν A συμπ + τυχαίος?

Θέτω $T = A^*A$: συμπ, αυτοσυζυγής

οπότε οι ιδιόχωροι $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(T)\}$ είναι $\perp$ ανά δύο και παράγουν τον H

Ειδικότερα $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\}$ είναι όλοι πεπερ. διάστασης

(διότι $T|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$

άρα $I_{M_\lambda} = \frac{T}{\lambda}\Big|_{M_\lambda}$: συμπ.

αναγκαστικά $\dim M_\lambda < +\infty$)

παράγουν το $(M_0)^\perp = (\ker T)^\perp$

Παρατ. $\ker T = \ker A^*A = \ker A$

διότι $x \in \ker A$ τότε $Tx = A^*Ax = 0$

αν $x \in \ker T$, τότε $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle$
$= \langle A^*Ax, x\rangle$
$= \langle Tx, x\rangle = 0$

άρα $Ax = 0$

$$H = \ker A \oplus \bigoplus_{\underbrace{\lambda \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}}_{\text{αριθμήσιμο}}} M_\lambda(T)$$

(διότι ο T συμπαγής και $\operatorname{im} T$ διαχωρίσιμος χώρος, άρα ∀ ορθοκανονική οικογένεια είναι αριθμήσιμη και διαφορετικές ιδιοτιμές συμπαγούς + αυτοσυζυγούς έχουν $\perp$ ιδιόχωρους)

∀ M_λ έχει πεπερασμένη διάσταση, $(\lambda \neq 0)$

Χρήσιμη παρατήρηση : $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ ✓
και $A^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ ✓

διότι ξέρω ότι ∀ B με $BT = TB$
έχει $B(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

όμως

$$AT = A(A^*A) = (AA^*)A = (A^*A)A = TA$$

$$A^*(A^*A) = A^*(AA^*) = (A^*A)A^* .$$

$$A = \begin{array}{c} \ker A \;|\; M_{\lambda_1} \;|\; M_{\lambda_2} \cdots \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & X & 0 & \\ \hline & 0 & X & \\ \hline & & & X \end{array}\right] \end{array}$$

Όμως $\forall \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ θεωρώ

$$C_\lambda = A\big|_{M_\lambda} \in \mathcal{B}(M_\lambda)$$

(διότι $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$)

αρκεί να διαγωνοποιήσω την C_λ $(\forall \lambda)$

Άρα Τ∂Σ, $\exists$ ορθ βάση $\{x_1^\lambda, x_2^\lambda, \dots, x_{n_\lambda}^\lambda\}$ του M_λ

και $c(k,\lambda)$ $(k = 1, \dots, n_\lambda)$

ώστε $C_\lambda x_k^\lambda = c(k,\lambda) x_k^\lambda$

$$|c(k,\lambda)| \le \|C_\lambda\| \le \|A\|$$

Τελικά η ένωση όλων των βάσεων

$$\{x_k^\lambda : \lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\},\ k = 1, \dots, n_\lambda\}$$

ορθοκανονική βάση του $\bigoplus M_\lambda$

$= (\ker A)^\perp$

ως προς την οποία ο A διαγων:

$$\underline{A x_k^\lambda} = C_\lambda x_k^\lambda = \underline{c(k,\lambda)}\, x_k^\lambda$$

Ισχύει $\forall\, C_j$ είναι φυσιολογικός

Απόδ. Θα δ.ο. $C_j^* = A^*\big|_{M_j}$

διότι $\left(A\big|_{M_j}\right)^* = A^*\big|_{M_j}$

Έστω $x, y \in M_j$:

$$\langle C_j^* x, y\rangle \overset{\text{ορ}^*}{=} \langle x, C_j y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle A^* x, y\rangle$$

άρα

$$\langle \underbrace{C_j^* x - A^* x}_{\in M_j \text{ διότι } A^*(M_j) \subseteq M_j}, y\rangle = 0 \quad \forall y \in M_j$$

άρα $C_j^* x - A^* x \in M_j \cap M_j^\perp = \{0\}$

άρα, $\forall x \in M_j$, $C_j^* x = A^* x$

Έπεται ότι C_j φυσ.:

$$\forall x \in M_j: \ \|C_j^* x\| = \|A^* x\| \overset{A \text{ φυσ}}{=} \|Ax\| = \|C_j x\|$$

$\Downarrow$

C_j φυσιολ. $\blacksquare$

<u>Παρ/γ</u> στο $\ell^2(\mathbb{Z})$: $Ue_n = e_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{c} \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \| \\ H \end{array}$$

$$H_0 = \overline{[e_n : n \geq 13]}$$

$U(H_0) \subseteq H_0$: $Ue_n = e_{n+1} \in H_0$

όταν $n \geq 13$

όμως, αν $V = U\big|_{H_0}$

<u>δεν</u> ισχύει ότι $V^* = U^*\big|_{H_0}$

διότι $V^* e_{13} = 0$ ενώ $U^* e_{13} = e_{12} \notin H_0$

διότι $\forall n \geq 13$

$$\langle V^* e_{13}, e_n \rangle = \langle e_{13}, Ve_n \rangle$$

$$= \langle e_{13}, e_{n+1} \rangle = 0$$

$\forall n \geq 13$

$$\left.\begin{array}{l} V^* e_{13} \perp H_0 \\ \text{επίσης } V^* e_{13} \in H_0 \end{array}\right\} \Rightarrow V^* e_{13} = 0$$

Παρατήρηση: Αν A συμπ. + αυτοσυζ.

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

(δείξαμε ότι αν A συμπαγής και αυτοσυζ. τότε $\exists\, \lambda$ ιδιοτιμή: $\|A\| = |\lambda|$)

Απόδ. Έχω διαγωνοποίηση του A:

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n x \quad \forall x \in H$$

όπου $\{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+\} = \sigma_p(A)$

και $P_n = P(M_{\lambda_n})$

οπότε

$$\|Ax\|^2 = \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n x\Big\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda_n P_n x\|^2$$

$$\le \sup|\lambda_n|^2 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n x\|^2\Big)$$

$$= \sup|\lambda_n|^2 \Big\|\sum P_n x\Big\|^2$$

$$\le \sup|\lambda_n|^2 \|x\|^2 \quad \forall x$$

$$\forall x, \quad \|Ax\| \le \left(\sup|\lambda_n|\right) \|x\|$$

$$\Downarrow \text{ ορ } \|A\|$$

$$\|A\| \le \sup|\lambda_n| \qquad \text{όμως } \lambda_n \in \sigma_p(A)$$

$$\text{άρα } |\lambda_n| \le \|A\|$$

$$\le \|A\|$$

άρα ισότητα

Δεν ισχύει εν γένει όταν A μη φυσιολογικός αχ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pi/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{έχει } \|A\| = 1 \\ \text{αλλά } \sigma_p(A) = \{0\} \end{array}$$

Δεν ισχύει εν γένει για A μη συμπαγής

$$A : L^2[0,1] \longrightarrow L^2([0,1])$$

$$(Af)(t) = t f(t)$$

$$\|A\| = 1 \quad \text{αλλά } \sigma_p(A) = \emptyset$$

γιατί;

Αν $\{P_n\}$ $\perp$ ανά δύο προβολές και $\forall x \in H$

η σειρά $\sum P_n x$ συγκλίνει

στο Px, όπου P η προβολή
στο κλειστό άθροισμα των $P_n(H)$

δηλ. στο μικρότερο κλειστό υπόχωρο που $\supseteq P_n(H)$ $\forall n$

όπως όταν οι $\{P_n(H) \; n \in \mathbb{N}\}$ παράγουν το H

τότε η $\sum P_n x = x$ $\forall x$

Όταν A συμπαγής αυτοσυζυγής και $\sigma_p(A) = \cancel{\{\lambda_n : n\in\mathbb{N}\}}$

$\lambda_0 = 0$, $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$

και $P_n = P(M_{\lambda_n})$

Ξέρω ότι $\{P_n\}$ $\perp$ ανά δύο και παράγουν το H

$\Downarrow$

$$\forall x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x$$

$\Downarrow$ A συνεχής τελεστής

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} AP_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n x \qquad P_n x \in M_{\lambda_n}$$

$$\forall x, \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x \; : \; \left\| x - \sum^{N} P_n x \right\| \to 0$$

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n x \; : \; \left\| Ax - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n x \right\| \to 0$$

<u>Ισχυει</u> $\quad A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$

<u>δηλ</u> $\left\| A - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n \right\| \to 0$

ενω <u>δεν</u> ισχυει εν γενει

$$\Big\| I - \underbrace{\sum_{n=0}^{N} P_n}_{} \Big\| \to 0$$

διοτι $\quad P$ προβ $\left(\bigoplus^{N} M_{\lambda_n} \right)^{\perp}$

αφου εν γενει εχω $\| \quad \| = 1$

<u>Αποδ Ισχ</u> $\forall x$,

$$\left\| Ax - \sum^{N} \lambda_n P_n x \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n x - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n x \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n P_n x \right\|^2$$

$$\overset{?}{=} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \lambda_n P_n x \right\|^2$$

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n$$

Ξέρω ότι $\forall x$, $\|A_N x - Ax\| \to 0$

Ισχ. (A_N) είναι $\| \; \|_{B(H)}$ - βασική

Απόδ.

$N > M$ $\quad \|\underbrace{(A_N - A_M)}x\|^2$

$$= \left\|\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n P_n x\right\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=}$$

$$= \sum_{n=M+1}^{N} \|\lambda_n P_n x\|^2$$

$$\leq \max\{|\lambda_n|^2 \; M < n \leq N\} \sum_{n=M+1}^{N} \|P_n x\|^2$$

$$\leq \max\underbrace{\{|\lambda_n|^2 \; M < n \leq N\}}\|x\|^2 \quad \forall x$$

$\Rightarrow$

$$\|A_N - A_M\| \leq \max\{|\lambda_n| : M < n \leq N\}$$

Όμως A συμπαγής, άρα $\lambda_n \to 0$ (αν είναι άπειρα)

οπότε $\max\{|\lambda_n| : n > M\} \xrightarrow[M \to \infty]{} 0$

άρα (A_N) βασική

άρα $\exists B \in B(H) : \|A_N - B\| \to 0$

οπότε $\forall x$, $Bx = \lim_N A_N x = Ax$

άρα $B = A$

οπότε

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} \lambda_n P_n - A\right\| \to 0$$

Παρατήρηση (A αυτοσυζυγής)

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\|=1\}$$

(Ξέρω ότι η γενικά

$$\|A\| = \sup\left\{|\langle Ax,y\rangle| : \begin{array}{l}\|x\|=1\\ \|y\|=1\end{array}\right\}$$

και ότι

$$\sup\{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\|=1\} \le \|A\|$$

η γενικά

ότι όταν $A=A^*$ ισχύει $=$)

Απόδ. $A = \cancel{\sum \lambda_n P_n}$

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

μηδενικό

Όμως το $\sigma_p(A)$ έχει μόνο σ.σ. το 0

άρα $\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma_p(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda\in\sigma_p(A)\}$

άρα $\exists\, \lambda_0 \in \sigma_p(A) : |\lambda| = \|A\|$

και αν $x \in M_\lambda$ με $\|x\|=1$

τότε $|\langle Ax,x\rangle| = |\langle\lambda x,x\rangle| = |\lambda|\langle x,x\rangle = |\lambda| = \|A\|$

άρα $\sup\{\qquad\} = \|A\|$

Υπενθύμιση: $y \in H$, $x \in K$

$$x \otimes y^* : H \longrightarrow K$$
$$\xi \longmapsto \langle \xi, y \rangle x$$

Ειδικότερα, $y \in H$, $\|y\| = 1$

$y \otimes y^* =$ η προβολή $[y]$

Επομένως, αν A αυτ. και συμπαγής

υπάρχει $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματα

άρα $\exists\, a(n) \in \mathbb{C}$: $A x_n = a(n) x_n$ $\forall n$

και σε $\max\{|a(n)| : n \in \mathbb{N}\} = \|A\|$

Τότε: $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, x_n \otimes x_n^*$

(είναι αναδιατύπωση του $A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n$)

Έστω $(a(n))$ μηδενική ακολουθία

$(x_n), (y_n)$ δύο ορθοκανονικές ακολουθίες

$y_n \in H, \; x_n \in K$

$$A_N = \sum_{n=1}^{N} a(n)\, x_n \otimes y_n^* \quad ; \text{ έχει τάξη } \leq N$$

και, αφού $a(n) \to 0$

όπως πριν αποδεικνύεται ότι

(A_N) είναι $\| \;\|$-βασική

οπότε $\exists\, A = \| \;\|\text{-}\lim_N \sum_{n=1}^{N} a(n)\, x_n \otimes y_n^*$

<u>δηλ</u>

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, x_n \otimes y_n^*$$

όριο συμπαγών, άρα συμπ.

Θέλω να ~~...~~ το αντίστροφο

<u>Ιδέα</u> $\quad A : H \to K$ συμπ.

$A^*A : H \to H$ συμπ., θετ.

οπότε $\exists\ (y_n)$ ΟΚ βάση του H

και ~~Ж~~ ώστε $A^*A y_n = \lambda_n y_n$

όπου $\lambda_n \to 0$

$$A y_n = x_n$$

$$\cancel{A}\ \langle x_n, x_m\rangle = \langle A y_n, A y_m\rangle$$

$$= \langle A^*A y_n, y_m\rangle$$

$$= \lambda_n \langle y_n, y_m\rangle = 0 \text{ όταν } n\neq m$$

~~A~~ Ας θεωρήσουμε μόνο εκείνα τα y_n που αντιστοιχούν σε $\lambda_n \neq 0$

αυτά αποτελούν ΟΚ βάση του $(\ker A^*A)^\perp$
$\|$
$(\ker A)^\perp$

Τότε, ~~B~~ $x_n = A y_n \neq 0$

$(\lambda_n > 0)$

οπότε μπορώ

να θεωρήσω $z_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{\lambda_n}}$

Ισχυρίζομαι $\|z_n\| = 1$

$$\|z_n\|^2 = \frac{1}{\lambda_n}\langle x_n, x_n\rangle = \frac{1}{\lambda_n}\langle A y_n, A y_n\rangle$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\langle A^*A y_n, y_n\rangle$$

$$= \frac{\lambda_n}{\lambda_n}\langle y_n, y_n\rangle = 1$$

Ξέρουμε οι (y_n), (z_n) είναι ορθοκανονικές

και $Ay_n = x_n = \sqrt{\lambda_n}\, z_n$

Αν
$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, z_n \otimes y_n^*$$

(θα είναι συμπαγής διότι $\sqrt{\lambda_n} \to 0$)

τότε $B = A$

<u>Απόδ.</u> $\forall m$, $By_m = \sum \sqrt{\lambda_n}\,(z_n \otimes y_n^*)(y_m)$

$$= \sum_n \sqrt{\lambda_n}\,\langle y_m, y_n\rangle z_n$$

$$= \sqrt{\lambda_m}\, z_m = x_m = Ay_m$$

άρα στον χώρο H_0 που παράγουν τα $\{y_n\}$ ισχύει $B = A$

στο $H_0^{\perp}$, ο $A = 0$

$\ker(A^*A) = \ker A$

άρα ισχύει και ο $B = 0$

διότι $\forall y \in H_0^{\perp}$ $\langle y, y_n\rangle = 0$ $\forall n$

$$By = \sum \sqrt{\lambda_n}\,\langle y, y_n\rangle z_n = 0$$

Κάθε συμπαγής $A : H \to K$
γράφεται

$$A = \sum \sqrt{\lambda_n}\, z_n \otimes y_n^*$$

όπου $\{y_n\}$ είναι ON βάση

της $(\ker A)^\perp$ τ.ω.

και $A^*A y_n = \lambda_n y_n$

και $z_n = \dfrac{A y_n}{\sqrt{\lambda_n}}$